

3HDMを用いたフレーバーモデルとCP位相の予言

広島大学 井澤幸邑

2022年 11月9日

Flavor Physics Workshop 2022 @伊豆

arXiv:2209.10201

共同研究者：清水勇介、武井玄徳

もくじ

1. 動機
2. A_4 対称性
3. 3HDM
4. フレーバー模型
5. 解析結果
6. まとめ

1. 動機

物質粒子には、右図のようにクォーク、レプトンが3世代存在する

レプトンの世代間には質量の違い(質量階層性)とクォークに比べて大きなフレーバーの混合(世代混合)が存在

標準模型を超える理論が必要

世代間に対称性(世代対称性)を課す

世代対称性として A_4 対称性を用いる

今回
Higgs粒子にも世代を3世代持たせる(3HDM)

新しい模型の構築

物質粒子と世代の関係図

| | | 物質粒子 | | | |
|----|------|---|--|---|---|
| | | クォーク | | レプトン | |
| 世代 | 第一世代 |  u アップ |  d ダウン |  e 電子 |  ν_e 電子ニュートリノ |
| | 第二世代 |  c チャーム |  s ストレンジ |  μ μ 粒子 |  ν_μ μ ニュートリノ |
| | 第三世代 |  t トップ |  b ボトム |  τ τ 粒子 |  ν_τ τ ニュートリノ |

2. A_4 対称性

A_4 対称性：4次の交代群，正四面体の持つ対称性，

非可換離散群の中で
3表現を含む最小の群

代数関係 $S^2 = (ST)^3 = T^3 = 1$ (S, T :生成子)

表現

$$1 : S = 1, \quad T = 1$$

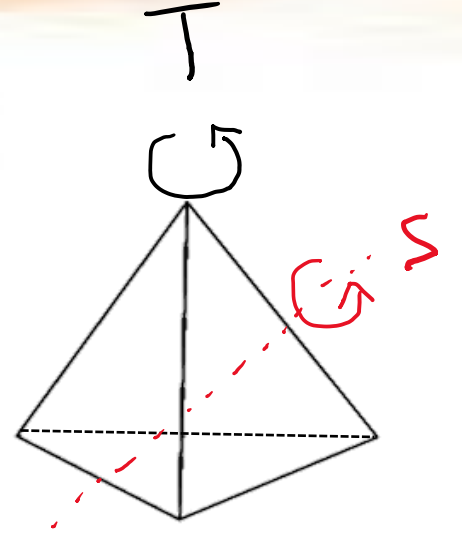
$$1' : S = 1, \quad T = e^{\frac{i4\pi}{3}} = \omega^2$$

$$1'' : S = 1, \quad T = e^{\frac{i2\pi}{3}} = \omega$$

$$3: S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix}$$

掛け算則 $1' \otimes 1' = 1''$, $1'' \otimes 1'' = 1'$, $1' \otimes 1'' = 1$, $3 \otimes 3 = 1 \oplus 1' \oplus 1'' \oplus 3_S \oplus 3_A$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}_3 \otimes \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}_3 = (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2)_1 \oplus (\alpha_3\beta_3 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)_{1'} \oplus (\alpha_2\beta_2 + \alpha_1\beta_3 + \alpha_3\beta_1)_{1''} \\ \oplus \begin{pmatrix} 2\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 \\ 2\alpha_3\beta_3 - \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \\ 2\alpha_2\beta_2 - \alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1 \end{pmatrix}_{3_S} \oplus \begin{pmatrix} \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 \\ \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \\ \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 \end{pmatrix}_{3_A}$$



3. 3HDM

SMのHiggs doublet を3つに拡張する(12個の実スカラー場)

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} \phi_1^+ \\ \phi_1^0 \end{pmatrix}, \phi_2 = \begin{pmatrix} \phi_2^+ \\ \phi_2^0 \end{pmatrix}, \phi_3 = \begin{pmatrix} \phi_3^+ \\ \phi_3^0 \end{pmatrix}$$

$SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ の下での3HDMでのHiggs ポテンシャル

$$V = - \sum_{i,j=1}^3 m_{ij}^2 (\phi_i^\dagger \phi_j) + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l=1}^3 \lambda_{ijkl} (\phi_i^\dagger \phi_j) (\phi_k^\dagger \phi_l)$$

ポテンシャルの極小値で満たす条件

$$\left. \left(\frac{\partial V}{\partial \phi_1} \right) \right|_{\phi_1=\langle \phi_1 \rangle, \phi_2=\langle \phi_2 \rangle, \phi_3=\langle \phi_3 \rangle} = 0$$

$$\left. \left(\frac{\partial V}{\partial \phi_2} \right) \right|_{\phi_1=\langle \phi_1 \rangle, \phi_2=\langle \phi_2 \rangle, \phi_3=\langle \phi_3 \rangle} = 0$$

$$\left. \left(\frac{\partial V}{\partial \phi_3} \right) \right|_{\phi_1=\langle \phi_1 \rangle, \phi_2=\langle \phi_2 \rangle, \phi_3=\langle \phi_3 \rangle} = 0$$

↓ 自発的対称性の破れ

3つの自由度が減る(12-3=9)

→ ϕ は9つの実スカラー場の展開で表される

$$\langle \phi_i \rangle = \begin{pmatrix} \rho_i^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v_i + \rho_i + i\chi_i) \end{pmatrix}, i = 1, 2, 3$$

質量の固有状態



- (i) 3つのCP-even なスカラー場
- (ii) 2つのCP-odd なスカラー場
- (iii) 4つの荷電スカラー場

3HDM+A₄対称性

φをA₄の3表現として用いる

$$\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3), \quad (\phi^\dagger = (\phi_1^\dagger, \phi_2^\dagger, \phi_3^\dagger))$$

ポテンシャル $V = -\mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2$ の計算

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix}$$

$$\phi^\dagger \phi = \begin{pmatrix} \phi_1^\dagger \\ \phi_2^\dagger \\ \phi_3^\dagger \end{pmatrix}_3 \otimes \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}_3 = (\phi_1^\dagger \phi_1 + \phi_2^\dagger \phi_2 + \phi_3^\dagger \phi_3)_1 = |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + |\phi_3|^2$$

$$\begin{aligned} (\phi^\dagger \phi)^2 &= \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}_3 \otimes \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}_3 \otimes \begin{pmatrix} \phi_1^\dagger \\ \phi_2^\dagger \\ \phi_3^\dagger \end{pmatrix}_3 \otimes \begin{pmatrix} \phi_1^\dagger \\ \phi_2^\dagger \\ \phi_3^\dagger \end{pmatrix}_3 \\ &= (\phi_1 \phi_1 + 2\phi_2 \phi_3)_1 \otimes (\phi_1^\dagger \phi_1^\dagger + 2\phi_2^\dagger \phi_3^\dagger)_1 + (\phi_2 \phi_2 + 2\phi_3 \phi_1)_{1''} \otimes (\phi_2^\dagger \phi_2^\dagger + 2\phi_3^\dagger \phi_1^\dagger)_{1'} \\ &\quad + (\phi_3 \phi_3 + 2\phi_1 \phi_2)_{1'} \otimes (\phi_3^\dagger \phi_3^\dagger + 2\phi_1^\dagger \phi_2^\dagger)_{1''} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \phi_1 \phi_1 - \phi_2 \phi_3 \\ \phi_3 \phi_3 - \phi_1 \phi_2 \\ \phi_2 \phi_2 - \phi_3 \phi_1 \end{pmatrix}_3 \otimes \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \phi_1^\dagger \phi_1^\dagger - \phi_2^\dagger \phi_3^\dagger \\ \phi_2^\dagger \phi_2^\dagger - \phi_3^\dagger \phi_1^\dagger \\ \phi_3^\dagger \phi_3^\dagger - \phi_1^\dagger \phi_2^\dagger \end{pmatrix}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= |\phi_1^2 + 2\phi_2 \phi_3|^2 + |\phi_2^2 + 2\phi_3 \phi_1|^2 + |\phi_3^2 + 2\phi_1 \phi_2|^2 \\ &\quad + \frac{4}{9} [|\phi_1^2 - \phi_2 \phi_3|^2 + |\phi_2^2 - \phi_3 \phi_1|^2 + |\phi_3^2 - \phi_1 \phi_2|^2] \end{aligned}$$

A₄の掛け算則

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}_3 \otimes \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}_3 \\ &= (\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_3 + \alpha_3 \beta_2)_1 \\ &\quad \oplus (\alpha_3 \beta_3 + \alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1)_{1'} \\ &\quad \oplus (\alpha_2 \beta_2 + \alpha_1 \beta_3 + \alpha_3 \beta_1)_{1''} \\ &\quad \oplus \begin{pmatrix} 2\alpha_1 \beta_1 - \alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2 \\ 2\alpha_3 \beta_3 - \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \\ 2\alpha_2 \beta_2 - \alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_1 \end{pmatrix}_{3_S} \\ &\quad \oplus \begin{pmatrix} \alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2 \\ \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \\ \alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3 \end{pmatrix}_{3_A} \end{aligned}$$

真空構造

ポテンシャルは

$$\begin{aligned}
 V &= -\mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \\
 &= -\mu^2 (|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + |\phi_3|^2) + \lambda_1 |\phi_1^2 + 2\phi_2\phi_3|^2 + \lambda_2 |\phi_2^2 + 2\phi_3\phi_1|^2 + \lambda_3 |\phi_3^2 + 2\phi_1\phi_2|^2 \\
 &\quad + \lambda_4 [|\phi_1^2 - \phi_2\phi_3|^2 + |\phi_2^2 - \phi_3\phi_1|^2 + |\phi_3^2 - \phi_1\phi_2|^2]
 \end{aligned}$$



ポテンシャルの極小値で満たす条件を解く
 $\left(\frac{\partial V}{\partial \phi_i}\right)_{\phi_1=\langle\phi_1\rangle, \phi_2=\langle\phi_2\rangle, \phi_3=\langle\phi_3\rangle} = 0, \quad i = 1, 2, 3$

局所的な真空期待値 ($\lambda_1 \neq \lambda_4, 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \neq 0$)

$$\langle \phi_1 \rangle = v_1$$

$$\langle \phi_2 \rangle = -\frac{\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4}{2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4} v_1 \pm \frac{\sqrt{\{-2\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - (\lambda_1 - 3\lambda_4)(\lambda_2 + \lambda_3) - 3\lambda_1\lambda_4\}v_1^2 + \frac{1}{2}(2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)\mu^2}}{2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4}$$

$$\langle \phi_3 \rangle = -\frac{\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4}{2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4} v_1 \pm \frac{\sqrt{\{-2\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - (\lambda_1 - 3\lambda_4)(\lambda_2 + \lambda_3) - 3\lambda_1\lambda_4\}v_1^2 + \frac{1}{2}(2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)\mu^2}}{2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4}$$

パラメーター v, β
 で書き変える



$$\langle \phi \rangle = \begin{pmatrix} v \cos \beta \\ \frac{1}{\sqrt{2}} v \sin \beta \\ \frac{1}{\sqrt{2}} v \sin \beta \end{pmatrix}$$

4. フレーバー模型

| | $\bar{l} = (\bar{l}_e, \bar{l}_\mu, \bar{l}_\tau)$ | e_R | μ_R | τ_R | ν_R | $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ |
|-----------|--|-------|---------|----------|---------|-----------------------------------|
| $SU(2)_L$ | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| A_4 | 3 | 1 | 1'' | 1' | 3 | 3 |

ラグランジアン^の質量項: $L_Y = L_l + L_D + L_M + h.c.$

(1) 荷電レプトンの質量項: $L_l = y_e \bar{l}_e \phi e_R + y_\mu \bar{l}_\mu \phi \mu_R + y_\tau \bar{l}_\tau \phi \tau_R$

(2) Diracニュートリノの質量項: $L_D = y_D \bar{l} \tilde{\phi} \nu_R$

(3) 右巻きマヨラナニュートリノの質量項: $L_M = M \bar{\nu}_R^c \nu_R$



荷電レプトンと左巻きマヨラナニュートリノの質量行列を求める

質量行列の計算

(1) 荷電レプトンの質量項

$$L_l = y_e \bar{l} \phi e_R + y_\mu \bar{l} \phi \mu_R + y_\tau \bar{l} \phi \tau_R$$

$$y_e \begin{pmatrix} \bar{l}_e \\ \bar{l}_\mu \\ \bar{l}_\tau \end{pmatrix}_3 \otimes \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}_3 \otimes (e_R)_1 = y_e (\bar{l}_e \phi_1 + \bar{l}_\mu \phi_2 + \bar{l}_\tau \phi_3) e_R$$

$\Downarrow \langle \phi \rangle = (v_1, v_2, v_3)$
 $y_e (\bar{e}_L v_1 + \bar{\mu}_L v_2 + \bar{\tau}_L v_3) e_R$

$$\rightarrow y_e (\bar{e}_L v_1 + \bar{\mu}_L v_3 + \bar{\tau}_L v_2) e_R + y_\mu (\bar{\tau}_L v_3 + \bar{e}_L v_2 + \bar{\mu}_L v_1) \mu_R + y_\tau (\bar{\mu}_L v_2 + \bar{\tau}_L v_1 + \bar{e}_L v_3) \tau_R$$

$$= (y_e v_1) \bar{e}_L e_R + (y_\mu v_2) \bar{e}_L \mu_R + (y_\tau v_3) \bar{e}_L \tau_R$$

$$+ (y_e v_3) \bar{\mu}_L e_R + (y_\mu v_1) \bar{\mu}_L \mu_R + (y_\tau v_2) \bar{\mu}_L \tau_R$$

$$+ (y_e v_2) \bar{\tau}_L e_R + (y_\mu v_3) \bar{\tau}_L \mu_R + (y_\tau v_1) \bar{\tau}_L \tau_R$$



荷電レプトンの質量行列

$$M_l = \begin{pmatrix} y_e v_1 & y_\mu v_2 & y_\tau v_3 \\ y_e v_3 & y_\mu v_1 & y_\tau v_2 \\ y_e v_2 & y_\mu v_3 & y_\tau v_1 \end{pmatrix}_{LR}$$

A_4 の掛け算則

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}_3 \otimes \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}_3$$

$$= (\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_3 + \alpha_3 \beta_2)_1$$

$$\oplus (\alpha_3 \beta_3 + \alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1)_{1'}$$

$$\oplus (\alpha_2 \beta_2 + \alpha_1 \beta_3 + \alpha_3 \beta_1)_{1''}$$

$$\oplus \begin{pmatrix} 2\alpha_1 \beta_1 - \alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2 \\ 2\alpha_3 \beta_3 - \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \\ 2\alpha_2 \beta_2 - \alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_1 \end{pmatrix}_{3_S}$$

$$\oplus \begin{pmatrix} \alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2 \\ \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \\ \alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3 \end{pmatrix}_{3_A}$$

質量行列の計算

(2) Diracニュートリノの質量項

$$L_D = y_D \bar{l} \tilde{\phi} \nu_R$$

$$= y_D \underbrace{\begin{pmatrix} \bar{l}_e \\ \bar{l}_\mu \\ \bar{l}_\tau \end{pmatrix}_3 \otimes \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_1 \\ \tilde{\phi}_3 \\ \tilde{\phi}_2 \end{pmatrix}_3}_{\mathbf{3}} \otimes \begin{pmatrix} \nu_{R1} \\ \nu_{R2} \\ \nu_{R3} \end{pmatrix}_3 = \left[\frac{y_{DS}}{3} \begin{pmatrix} 2\bar{l}_1 \tilde{\phi}_1 - \bar{l}_2 \tilde{\phi}_2 - \bar{l}_3 \tilde{\phi}_3 \\ 2\bar{l}_3 \tilde{\phi}_2 - \bar{l}_1 \tilde{\phi}_3 - \bar{l}_2 \tilde{\phi}_1 \\ 2\bar{l}_2 \tilde{\phi}_3 - \bar{l}_3 \tilde{\phi}_1 - \bar{l}_1 \tilde{\phi}_2 \end{pmatrix}_{3S} + \frac{y_{DA}}{2} \begin{pmatrix} \bar{l}_2 \tilde{\phi}_2 - \bar{l}_3 \tilde{\phi}_3 \\ \bar{l}_1 \tilde{\phi}_3 - \bar{l}_2 \tilde{\phi}_1 \\ \bar{l}_3 \tilde{\phi}_1 - \bar{l}_1 \tilde{\phi}_2 \end{pmatrix}_{3A} \right] \otimes \begin{pmatrix} \nu_{R1} \\ \nu_{R2} \\ \nu_{R3} \end{pmatrix}_3$$

$$\rightarrow \frac{y_{DS}}{3} [(2\bar{\nu}_e \nu_1 - \bar{\nu}_\mu \nu_2 - \bar{\nu}_\tau \nu_3) \nu_{R1} + (2\bar{\nu}_\tau \nu_2 - \bar{\nu}_e \nu_3 - \bar{\nu}_\mu \nu_1) \nu_{R3} + (2\bar{\nu}_\mu \nu_3 - \bar{\nu}_\tau \nu_1 - \bar{\nu}_e \nu_2) \nu_{R2}]$$

$$+ \frac{y_{DA}}{2} [(\bar{\nu}_\mu \nu_2 - \bar{\nu}_\tau \nu_3) \nu_{R1} + (\bar{\nu}_e \nu_3 - \bar{\nu}_\mu \nu_1) \nu_{R3} + (\bar{\nu}_\tau \nu_1 - \bar{\nu}_e \nu_2) \nu_{R2}]$$

Diracニュートリノの質量行列

$$M_D = y_{DS} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \nu_1 & -\frac{1}{3} \nu_2 & -\frac{1}{3} \nu_3 \\ -\frac{1}{3} \nu_2 & \frac{2}{3} \nu_3 & -\frac{1}{3} \nu_1 \\ -\frac{1}{3} \nu_3 & -\frac{1}{3} \nu_1 & \frac{2}{3} \nu_2 \end{pmatrix} + y_{DA} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{y_{DA}}{2} \nu_2 & \frac{y_{DA}}{2} \nu_3 \\ \frac{y_{DA}}{2} \nu_2 & 0 & -\frac{y_{DA}}{2} \nu_1 \\ -\frac{y_{DA}}{2} \nu_3 & \frac{y_{DA}}{2} \nu_1 & 0 \end{pmatrix}$$

A_4 の掛け算則

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}_3 \otimes \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}_3$$

$$= (\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_3 + \alpha_3 \beta_2)_1$$

$$\oplus (\alpha_3 \beta_3 + \alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1)_{1'}$$

$$\oplus (\alpha_2 \beta_2 + \alpha_1 \beta_3 + \alpha_3 \beta_1)_{1''}$$

$$\oplus \begin{pmatrix} 2\alpha_1 \beta_1 - \alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2 \\ 2\alpha_3 \beta_3 - \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \\ 2\alpha_2 \beta_2 - \alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_1 \end{pmatrix}_{3S}$$

$$\oplus \begin{pmatrix} \alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2 \\ \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \\ \alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3 \end{pmatrix}_{3A}$$

質量行列の計算

(3) マヨラナニュートリノの質量項

$$\begin{aligned}
 L_M &= \frac{1}{2} M \bar{\nu}_R^c \nu_R \\
 &= \frac{1}{2} M \begin{pmatrix} \bar{\nu}_{R1}^c \\ \bar{\nu}_{R2}^c \\ \bar{\nu}_{R3}^c \end{pmatrix}_3 \otimes \begin{pmatrix} \nu_{R1} \\ \nu_{R2} \\ \nu_{R3} \end{pmatrix}_3 = \frac{1}{2} M (\bar{\nu}_1^c \nu_1 + \bar{\nu}_2^c \nu_3 + \bar{\nu}_3^c \nu_2)
 \end{aligned}$$

マヨラナニュートリノの質量行列

$$M_R = \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M \\ 0 & M & 0 \end{pmatrix}$$

type-1シーソー機構より、ニュートリノの質量行列は、

$$\begin{aligned}
 m_\nu &= -M_D M_R^{-1} M_D^\dagger \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{-4y_{DS}^2(2v_1^2 + v_2v_3) + 9y_{DA}^2v_2v_3}{18M} & \frac{4y_{DS}(2y_{DS} - 3y_{DA})v_3^2 + (4y_{DS}^2 - 24y_{DS}y_{DA} - 9y_{DA}^2)v_1v_2}{36M} & \frac{4y_{DS}(2y_{DS} + 3y_{DA})v_2^2 + (4y_{DS}^2 + 24y_{DS}y_{DA} - 9y_{DA}^2)v_1v_3}{36M} \\ \frac{4y_{DS}(2y_{DS} - 3y_{DA})v_3^2 + (4y_{DS}^2 - 24y_{DS}y_{DA} - 9y_{DA}^2)v_1v_2}{36M} & \frac{-(2y_{DS} - 3y_{DA})^2v_2^2 + 8y_{DS}(2y_{DS} + 3y_{DA})v_1v_3}{36M} & \frac{-4y_{DS}^2(v_1^2 + 5v_2v_3) + 9y_{DA}^2(v_1^2 + v_2v_3)}{36M} \\ \frac{4y_{DS}(2y_{DS} + 3y_{DA})v_2^2 + (4y_{DS}^2 + 24y_{DS}y_{DA} - 9y_{DA}^2)v_1v_3}{36M} & \frac{-4y_{DS}^2(v_1^2 + 5v_2v_3) + 9y_{DA}^2(v_1^2 + v_2v_3)}{36M} & \frac{8y_{DS}(2y_{DS} - 3y_{DA})v_1v_2 - 9(2y_{DS} - 3y_{DA})^2v_3^2}{36M} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

固有値

① $|y_e|^2, |y_\mu|^2, |y_\tau|^2$ を求める

荷電レプトンの質量行列

真空期待値

$$M_l = \begin{pmatrix} y_e v_1 & y_\mu v_2 & y_\tau v_3 \\ y_e v_3 & y_\mu v_1 & y_\tau v_2 \\ y_e v_2 & y_\mu v_3 & y_\tau v_1 \end{pmatrix}_{LR}, \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \cos \beta \\ \frac{1}{\sqrt{2}} v \sin \beta \\ \frac{1}{\sqrt{2}} v \sin \beta \end{pmatrix} \text{ と、 } h_e \equiv |y_e|^2, h_\mu \equiv |y_\mu|^2, h_\tau \equiv |y_\tau|^2 \text{ として、}$$

$$M_l M_l^\dagger = \begin{pmatrix} h_e v^2 \cos^2(\beta) + \frac{1}{2}(h_\mu + h_\tau) v^2 \sin^2(\beta) & -\frac{1}{\sqrt{2}}(h_e + h_\mu) v^2 \cos(\beta) \sin(\beta) + \frac{1}{2} h_\tau v^2 \sin^2(\beta) & -\frac{1}{\sqrt{2}}(h_e + h_\tau) v^2 \cos(\beta) \sin(\beta) + \frac{1}{2} h_\mu v^2 \sin^2(\beta) \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}(h_e + h_\mu) v^2 \cos(\beta) \sin(\beta) + \frac{1}{2} h_\tau v^2 \sin^2(\beta) & h_\mu v^2 \cos^2(\beta) + \frac{1}{2}(h_e + h_\tau) v^2 \sin^2(\beta) & -\frac{1}{\sqrt{2}}(h_\mu + h_\tau) v^2 \cos(\beta) \sin(\beta) + \frac{1}{2} h_e v^2 \sin^2(\beta) \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}(h_e + h_\tau) v^2 \cos(\beta) \sin(\beta) + \frac{1}{2} h_\mu v^2 \sin^2(\beta) & -\frac{1}{\sqrt{2}}(h_\mu + h_\tau) v^2 \cos(\beta) \sin(\beta) + \frac{1}{2} h_e v^2 \sin^2(\beta) & h_\tau v^2 \cos^2(\beta) + \frac{1}{2}(h_e + h_\mu) v^2 \sin^2(\beta) \end{pmatrix}$$

ユニタリ行列 V_l で $M_l M_l^\dagger$ を対角化する

$$V_l^\dagger M_l M_l^\dagger V_l = \begin{pmatrix} m_e^2 & & \\ & m_\mu^2 & \\ & & m_\tau^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} m_e &= 0.51099 \text{ MeV} \\ m_\mu &= 105.658 \text{ MeV} \\ m_\tau &= 1776.86 \text{ MeV} \end{aligned}$$

以下の行列とその固有値に関する方程式を h_e, h_μ, h_τ について解いて、

$$\begin{cases} \text{Tr}(M_l M_l^\dagger) = m_e^2 + m_\mu^2 + m_\tau^2 \\ \det(M_l M_l^\dagger) = m_e^2 m_\mu^2 m_\tau^2 \\ [\text{Tr}(M_l M_l^\dagger)]^2 - \text{Tr}(M_l M_l^\dagger M_l M_l^\dagger) = 2(m_e^2 m_\mu^2 + m_\mu^2 m_\tau^2 + m_\tau^2 m_e^2) \end{cases}$$

$$h_e = |y_e|^2, h_\mu = |y_\mu|^2, h_\tau = |y_\tau|^2 \text{ が求まる}$$

物理量の計算

②ユニタリ行列 V_l を求める

求めた $|y_e|^2, |y_\mu|^2, |y_\tau|^2$ を $M_l M_l^\dagger$ へ代入し、対角化するユニタリ行列 V_l を求める

③ニュートリノについても同様に考え、 $m_\nu m_\nu^\dagger$ を対角化するユニタリ行列 V_ν を求める

④ $V_l^\dagger V_\nu = U_{PMNS}$ を数値計算し、混合角 $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$ を求める

$$U_{PMNS} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{CP}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{13}s_{23}e^{i\delta_{CP}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{13}s_{23}e^{i\delta_{CP}} & c_{13}s_{23} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}s_{13}c_{23}e^{i\delta_{CP}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}s_{13}c_{23}e^{i\delta_{CP}} & c_{13}c_{23} \end{pmatrix}$$

⑤ δ_{CP} を求める

Jarlskog 不変量： $J_{CP} = \text{Im} [U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j}] \Rightarrow \text{Im} [U_{e1} U_{\mu 1}^* U_{e2}^* U_{\mu 2}] = s_{12}c_{12}s_{23}c_{23}s_{13}c_{13}^2 \sin\delta_{CP}$

$$\therefore \sin\delta_{CP} = \frac{\text{Im} [U_{e1} U_{\mu 1}^* U_{e2}^* U_{\mu 2}]}{s_{12}c_{12}s_{23}c_{23}s_{13}c_{13}^2}$$

また $|U_{\tau 1}|^2 = s_{12}^2 s_{23}^2 + c_{12}^2 s_{13}^2 c_{23}^2 - 2s_{12}s_{23}c_{12}s_{13}c_{23} \cos\delta_{CP}$ より、 $\cos\delta_{CP} = \frac{s_{12}^2 s_{23}^2 + c_{12}^2 s_{13}^2 c_{23}^2 - |U_{\tau 1}|^2}{2s_{12}s_{23}c_{12}s_{13}c_{23}}$

これらの値から δ_{CP} を求める

⑥ $0\nu\beta\beta$ 崩壊実験の電子ニュートリノの有効質量 m_{ee} とマヨラナ位相 η_1, η_2 を求める

数値計算

⑦PDG(2021)とNuFIT(2021)のデータを用いる

e

$$J = \frac{1}{2}$$

$$\text{Mass } m = (548.579909070 \pm 0.000000016) \times 10^{-6} \text{ u}$$

$$\text{Mass } m = 0.5109989461 \pm 0.0000000031 \text{ MeV}$$

$$|m_{e^+} - m_{e^-}|/m < 8 \times 10^{-9}, \text{ CL} = 90\%$$

$$|q_{e^+} + q_{e^-}|/e < 4 \times 10^{-8}$$

Magnetic moment anomaly

$$(g-2)/2 = (1159.65218091 \pm 0.00000026) \times 10^{-6}$$

$$(g_{e^+} - g_{e^-}) / g_{\text{average}} = (-0.5 \pm 2.1) \times 10^{-12}$$

$$\text{Electric dipole moment } d < 0.11 \times 10^{-28} \text{ e cm, CL} = 90\%$$

$$\text{Mean life } \tau > 6.6 \times 10^{28} \text{ yr, CL} = 90\% \text{ [a]}$$

μ

$$J = \frac{1}{2}$$

$$\text{Mass } m = 0.1134289257 \pm 0.0000000025 \text{ u}$$

$$\text{Mass } m = 105.6583745 \pm 0.0000024 \text{ MeV}$$

τ

$$J = \frac{1}{2}$$

$$\text{Mass } m = 1776.86 \pm 0.12 \text{ MeV}$$

| | Normal Ordering (best fit) | | Inverted Ordering ($\Delta\chi^2 = 7.0$) | |
|---|---------------------------------|-------------------------------|--|-------------------------------|
| | bfp $\pm 1\sigma$ | 3σ range | bfp $\pm 1\sigma$ | 3σ range |
| $\sin^2 \theta_{12}$ | $0.304^{+0.012}_{-0.012}$ | 0.269 \rightarrow 0.343 | $0.304^{+0.013}_{-0.012}$ | 0.269 \rightarrow 0.343 |
| $\theta_{12}/^\circ$ | $33.45^{+0.77}_{-0.75}$ | 31.27 \rightarrow 35.87 | $33.45^{+0.78}_{-0.75}$ | 31.27 \rightarrow 35.87 |
| $\sin^2 \theta_{23}$ | $0.450^{+0.019}_{-0.016}$ | 0.408 \rightarrow 0.603 | $0.570^{+0.016}_{-0.022}$ | 0.410 \rightarrow 0.613 |
| $\theta_{23}/^\circ$ | $42.1^{+1.1}_{-0.9}$ | 39.7 \rightarrow 50.9 | $49.0^{+0.9}_{-1.3}$ | 39.8 \rightarrow 51.6 |
| $\sin^2 \theta_{13}$ | $0.02246^{+0.00062}_{-0.00062}$ | 0.02060 \rightarrow 0.02435 | $0.02241^{+0.00074}_{-0.00062}$ | 0.02055 \rightarrow 0.02457 |
| $\theta_{13}/^\circ$ | $8.62^{+0.12}_{-0.12}$ | 8.25 \rightarrow 8.98 | $8.61^{+0.14}_{-0.12}$ | 8.24 \rightarrow 9.02 |
| $\delta_{\text{CP}}/^\circ$ | 230^{+36}_{-25} | 144 \rightarrow 350 | 278^{+22}_{-30} | 194 \rightarrow 345 |
| $\frac{\Delta m_{21}^2}{10^{-5} \text{ eV}^2}$ | $7.42^{+0.21}_{-0.20}$ | 6.82 \rightarrow 8.04 | $7.42^{+0.21}_{-0.20}$ | 6.82 \rightarrow 8.04 |
| $\frac{\Delta m_{3\ell}^2}{10^{-3} \text{ eV}^2}$ | $+2.510^{+0.027}_{-0.027}$ | +2.430 \rightarrow +2.593 | $-2.490^{+0.026}_{-0.028}$ | -2.574 \rightarrow -2.410 |

<http://www.nu-fit.org/>

<https://pdg.lbl.gov>

⑧ β の値を振る

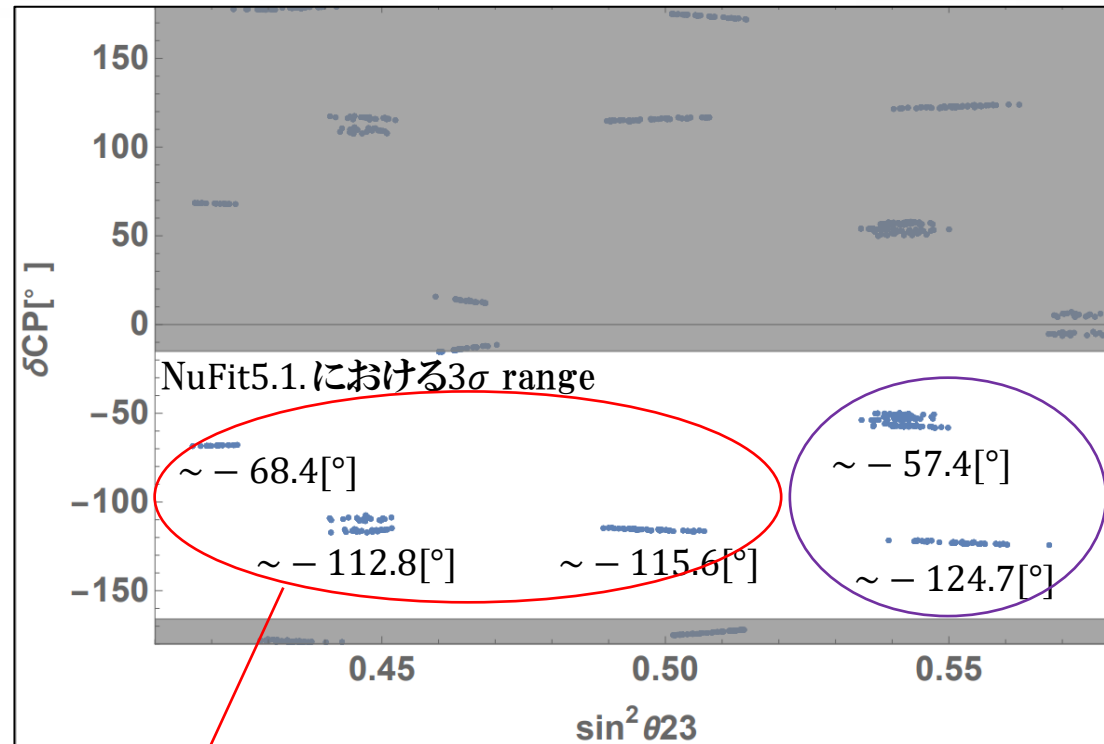
Higgs場の真空期待値

$$\langle \phi \rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \cos \beta \\ \frac{1}{\sqrt{2}} v \sin \beta \\ \frac{1}{\sqrt{2}} v \sin \beta \end{pmatrix}$$

$$\beta: -\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$$

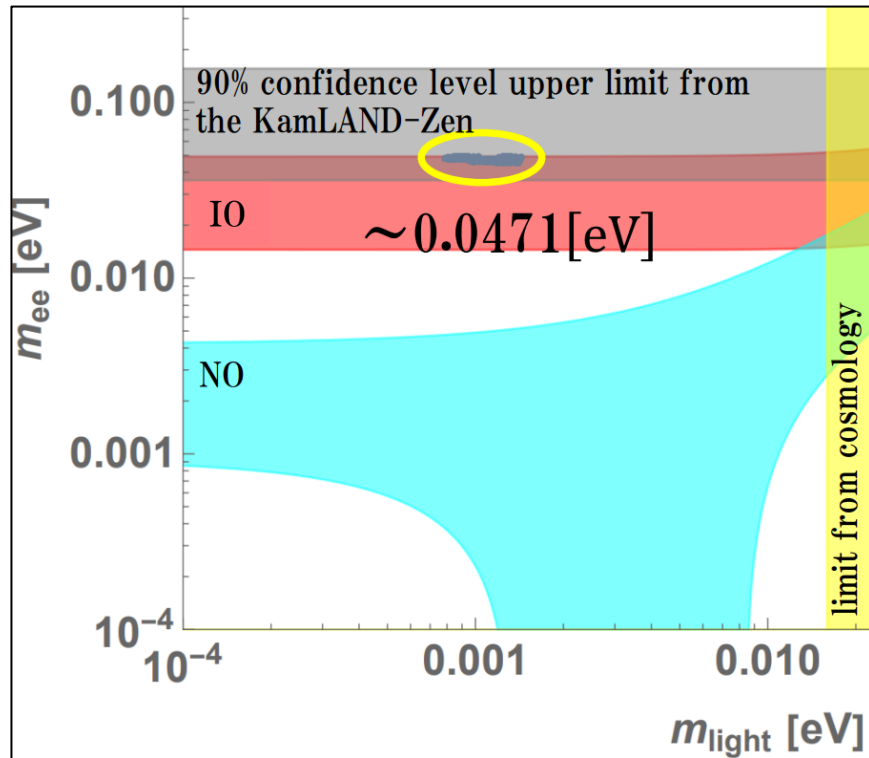
$$v = 173 \text{ GeV}$$

5. 解析結果

 δ_{CP} と $\sin^2\theta_{23}$ の予測 δ_{CP} への強い予言

解析結果

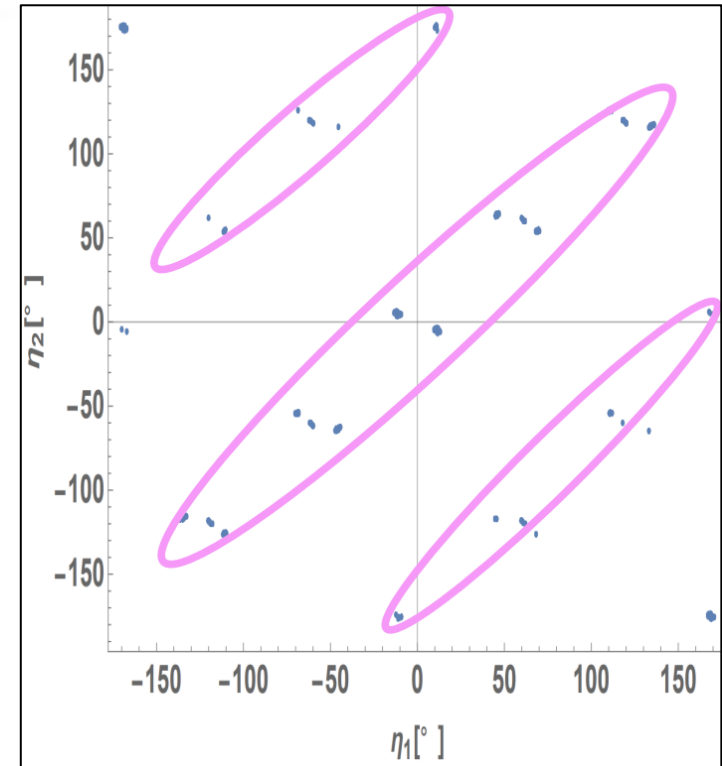
$0\nu\beta\beta$ 崩壊実験の電子ニュートリノの有効質量 m_{ee} と最も軽いニュートリノの質量 m_{light} の予測



電子ニュートリノの有効質量

$$m_{ee} = |m_1 U_{e1}^2 + m_2 U_{e2}^2 + m_3 U_{e3}^2|$$

マヨラナ位相 η_1, η_2 の予測



6. まとめ

世代対称性として、非可換離散群である A_4 対称性を用いた
Higgs場 ϕ を A_4 の3表現として用いた

→ A_4 対称性の下での3HDMのポテンシャル解析を行い、局所的な真空期待値 $\langle \phi \rangle = \begin{pmatrix} v \cos \beta \\ \frac{1}{\sqrt{2}} v \sin \beta \\ \frac{1}{\sqrt{2}} v \sin \beta \end{pmatrix}$ を得た



Higgs粒子にも世代構造があるとして3HDMを用いた新しいフレーバーモデルを構築した
新しいモデルの下で、荷電レプトンとニュートリノの質量行列を求めた

荷電レプトンの質量行列

$$M_l = \begin{pmatrix} y_e v_1 & y_\mu v_2 & y_\tau v_3 \\ y_e v_3 & y_\mu v_1 & y_\tau v_2 \\ y_e v_2 & y_\mu v_3 & y_\tau v_1 \end{pmatrix}_{LR}$$

左巻きマヨラナニュートリノの質量行列

$$m_\nu = -M_D M_R^{-1} M_D^\dagger \left(M_D = y_{DS} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} v_1 & -\frac{1}{3} v_2 & -\frac{1}{3} v_3 \\ -\frac{1}{3} v_2 & \frac{2}{3} v_3 & -\frac{1}{3} v_1 \\ -\frac{1}{3} v_3 & -\frac{1}{3} v_1 & \frac{2}{3} v_2 \end{pmatrix} + y_{DA} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{y_{DA}}{2} v_2 & \frac{y_{DA}}{2} v_3 \\ \frac{y_{DA}}{2} v_2 & 0 & -\frac{y_{DA}}{2} v_1 \\ -\frac{y_{DA}}{2} v_3 & \frac{y_{DA}}{2} v_1 & 0 \end{pmatrix}, M_R = \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M \\ 0 & M & 0 \end{pmatrix} \right)$$



数値計算により、 δ_{CP} と電子ニュートリノの有効質量 m_{ee} 、マヨナラ位相 η_1, η_2 を求めた

δ_{CP} と電子ニュートリノの有効質量 m_{ee} に対して強い予言を与えることができた ($m_{ee} \approx 0.0471[\text{eV}]$)

→近い将来、実験検証可能なモデル

交代群

対称群(置換群) : n 次の置換の集合

置換の中でも特定の数の組を順に動かすこと→巡回

巡回の中でも特に2つの数の巡回→互換

置換はいくつかの互換の積に分解できる(一意ではない)

偶置換 : 偶数個の互換の積で表される置換

奇置換 : 奇数個の互換の積で表される置換

交代群 : 対称群の偶置換の集合

パラメーター

標準模型 湯川結合定数 $\rightarrow 3*3*2=18$

フレーバー模型 湯川結合定数 $\rightarrow y_e, y_\mu, y_\tau, y_{DS}, y_{DA}, \phi_{DA} \rightarrow 6$

Modelのパラメーター

$$y_e, y_\mu, y_\tau, y_{DS}, y_{DA}, \phi_{DA}, \beta$$

物理量

$$m_e, m_\mu, m_\tau, \Delta m_{21}^2, \Delta m_{32}^2, \theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}, \delta_{CP}, m_{ee}, \eta_1, \eta_2$$

数値計算

④ V_l を求める

求めた $|y_e|^2, |y_\mu|^2, |y_\tau|^2$ を $M_l M_l^\dagger$ へ代入し、対角化するユニタリ一行列 V_l を求める

⑤ ニュートリノについても同様に考え、 V_ν を求める

左巻きマヨラナニュートリノの質量行列 m_ν について、ユニタリ一行列 V_ν により対角化されるとすると、

$$V_\nu^\dagger m_\nu m_\nu^\dagger V_\nu = \begin{pmatrix} m_3^2 & & \\ & m_1^2 & \\ & & m_2^2 \end{pmatrix} \text{を得る (inverted order)}$$



行列とその固有値に関する方程式

$$\begin{cases} \text{Tr}(m_\nu m_\nu^\dagger) = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 \\ \det(m_\nu m_\nu^\dagger) = m_1^2 m_2^2 m_3^2 \\ [\text{Tr}(m_\nu m_\nu^\dagger)]^2 - \text{Tr}(m_\nu m_\nu^\dagger m_\nu m_\nu^\dagger) = 2(m_1^2 m_2^2 + m_2^2 m_3^2 + m_3^2 m_1^2) \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \Delta m_{21}^2 &= m_2^2 - m_1^2 = 7.42(\text{eV})^2 \\ \Delta m_{23}^2 &= m_2^2 - m_3^2 = 2.49(\text{eV})^2 \end{aligned} \quad m_3, M \text{を振る}$$

$|y_{DS}|, |y_{DA}|, \text{位相 } \alpha (\equiv \text{Arg}(y_{DA}/y_{DS}))$ について解く

求めた $|y_{DS}|, |y_{DA}|, \text{位相 } \alpha (\equiv \text{Arg}(y_{DA}/y_{DS}))$ を $m_\nu m_\nu^\dagger$ へ代入し、対角化するユニタリ一行列 V_ν を求める

数値計算

⑥混合角 $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$ を求める

$V_l^\dagger V_\nu$ を数値計算する ここで、

$$V_l^\dagger V_\nu = U_{PMNS} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{CP}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{13}s_{23}e^{i\delta_{CP}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{13}s_{23}e^{i\delta_{CP}} & c_{13}s_{23} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}s_{13}c_{23}e^{i\delta_{CP}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}s_{13}c_{23}e^{i\delta_{CP}} & c_{13}c_{23} \end{pmatrix}$$

$$\theta_{12} = \tan^{-1} \left(\left| \frac{(V_l^\dagger V_\nu)_{12}}{(V_l^\dagger V_\nu)_{11}} \right| \right), \theta_{23} = \tan^{-1} \left(\left| \frac{(V_l^\dagger V_\nu)_{23}}{(V_l^\dagger V_\nu)_{33}} \right| \right), \theta_{13} = \sin^{-1} \left| (V_l^\dagger V_\nu)_{13} \right|$$

であるため、数値計算で求めた $V_l^\dagger V_\nu$ から、混合角 $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$ を求める

$V_l^\dagger V_\nu$ から求めた混合角 $\hat{\theta}_{12}, \hat{\theta}_{23}, \hat{\theta}_{13}$ と実験値を比較する

$$\begin{aligned} 0.546 &\leq \theta_{12} \leq 0.620 \\ 0.695 &\leq \theta_{23} \leq 0.900 \\ 0.144 &\leq \theta_{13} \leq 0.157 \end{aligned}$$

範囲内にある $\hat{\theta}_{12}, \hat{\theta}_{23}, \hat{\theta}_{13}$ を採用し、
そうではない場合は値を振り直し
再び最初から行う

数値計算

⑦ δ_{CP} を求める

$$\text{Jarlskog 不変量: } J_{CP} = \text{Im} [U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j}] \Rightarrow \text{Im} [U_{e1} U_{\mu 1}^* U_{e2}^* U_{\mu 2}] = s_{12} c_{12} s_{23} c_{23} s_{13} c_{13}^2 \sin \delta_{CP}$$

$$\therefore \sin \delta_{CP} = \frac{\text{Im} [U_{e1} U_{\mu 1}^* U_{e2}^* U_{\mu 2}]}{s_{12} c_{12} s_{23} c_{23} s_{13} c_{13}^2}$$

$$\text{また } |U_{\tau 1}|^2 = s_{12}^2 s_{23}^2 + c_{12}^2 s_{13}^2 c_{23}^2 - 2s_{12} s_{23} c_{12} s_{13} c_{23} \cos \delta_{CP} \text{ より、 } \cos \delta_{CP} = \frac{s_{12}^2 s_{23}^2 + c_{12}^2 s_{13}^2 c_{23}^2 - |U_{\tau 1}|^2}{2s_{12} s_{23} c_{12} s_{13} c_{23}}$$

これらの値から δ_{CP} を求める

⑧ マヨラナ位相を求める

ニュートリノがマヨラナ粒子である場合、 U_{PMNS} にマヨラナ位相 η_1, η_2 が加わる

$$U'_{PMNS} = U_{PMNS} \cdot P = \begin{pmatrix} c_{12} c_{13} & s_{12} c_{13} & s_{13} e^{-i\delta_{CP}} \\ -s_{12} c_{23} - c_{12} s_{13} s_{23} e^{i\delta_{CP}} & c_{12} c_{23} - s_{12} s_{13} s_{23} e^{i\delta_{CP}} & c_{13} s_{23} \\ s_{12} s_{23} - c_{12} s_{13} c_{23} e^{i\delta_{CP}} & -c_{12} s_{23} - s_{12} s_{13} c_{23} e^{i\delta_{CP}} & c_{13} c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\eta_1} & & \\ & e^{i\eta_2} & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

⑨ 有効質量 $|m_{ee}|$ を求める

ニュートリノを放出しない二重 β 崩壊 ($0\nu\beta\beta$) 実験での有効質量 $|m_{ee}|$ を計算する $m_{ee} = m_1 U_{e1}^2 + m_2 U_{e2}^2 + m_3 U_{e3}^2$

数値計算(補遺)

⑧マヨラナ位相を求める

ニュートリノがマヨラナ粒子である場合、 U_{PMNS} にマヨラナ位相 η_1, η_2 が加わる

$$U'_{PMNS} = U_{PMNS} \cdot P = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{CP}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{13}s_{23}e^{i\delta_{CP}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{13}s_{23}e^{i\delta_{CP}} & c_{13}s_{23} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}s_{13}c_{23}e^{i\delta_{CP}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}s_{13}c_{23}e^{i\delta_{CP}} & c_{13}c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\eta_1} & & \\ & e^{i\eta_2} & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

マヨラナ位相をニュートリノの質量を対角化するユニタリ一行列に加えて、 $U_{PMNS} \cdot P = V_l V_\nu \cdot P = V_l V'_\nu$ とする

そして M_ν は V_ν を用いて複素対角化される

$$V_\nu^\dagger M_\nu V_\nu^* = \begin{pmatrix} m_1 & & \\ & m_2 & \\ & & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & & \\ & e^{i\beta} & \\ & & e^{i\gamma} \end{pmatrix} = D_m P_m$$

P_m は数値計算から求まる $\rightarrow P$ も求めることができる

$$V'_\nu{}^\dagger M_\nu V'_\nu{}^* = P^\dagger V_\nu^\dagger M_\nu V_\nu^* P^* = D_m P_m P^{*2} = D_m$$

$$\therefore P_m P^{*2} = 1$$