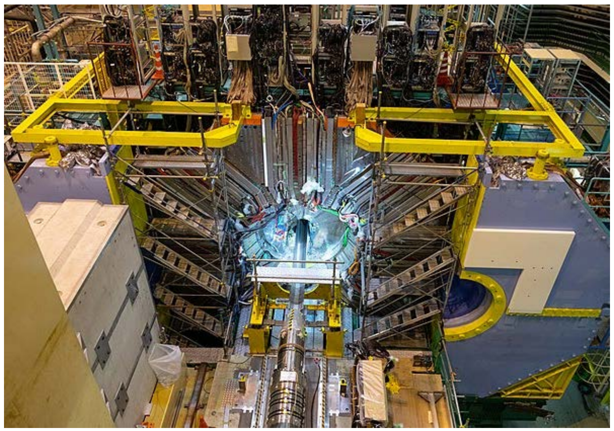
格子QCD

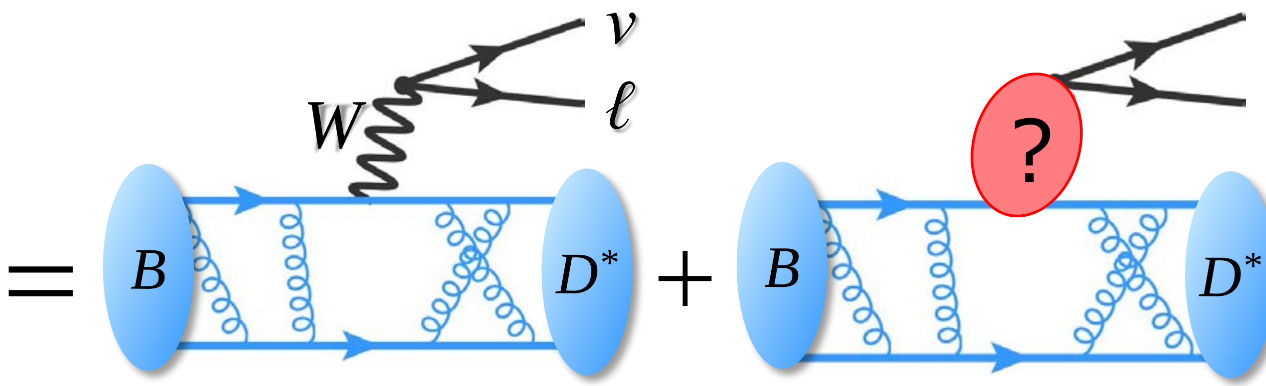
KEK, 総研大
金児 隆志

Flavor Physics Workshop 2021、2021年9月29日

introduction

精密実験測定　　vs　精密標準理論計算　⇒　新物理のヒント





標準理論の寄与　　　　新物理の寄与

格子QCDの役割　=　崩壊振幅に含まれるハドロン行列要素の計算

$$e.g.\ \mathcal{M}\left(B \to D^* \ell \nu\right) = V_{cb} \left\langle \ell \nu \middle| V_\mu - A_\mu \middle| 0 \right\rangle G_W \left\langle D^* \middle| V_\mu - A_\mu \middle| B \right\rangle$$

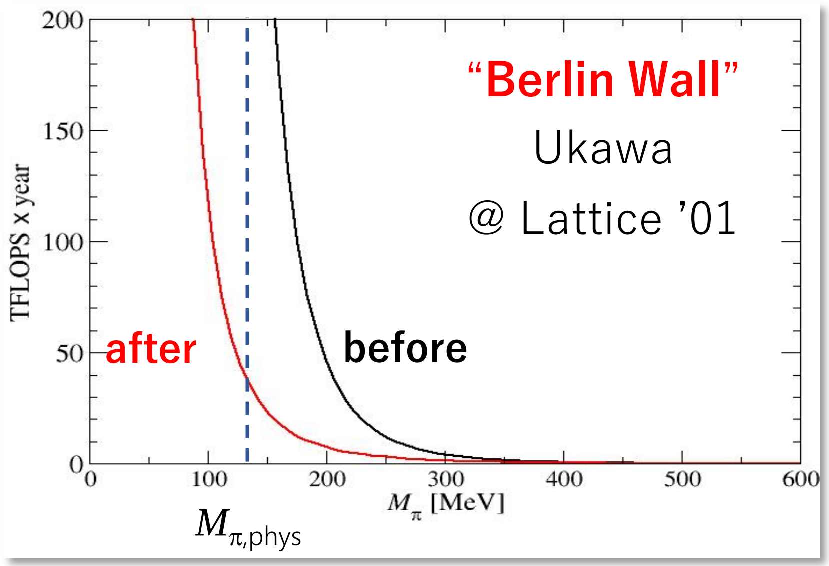
- ハドロン行列要素 – QCDの非摂動効果の第一原理計算
- 実験に見合う精度が必要
- 標準理論・新物理の寄与の両方で必要

introduction

最初の格子QCDシミュレーション in 1981

Creutz-Jacobs-Rebi, Creutz, Wilson, Weingarten, Hamber-Parisi, ...

e.g. 0.8 fm box,   2 GeV cut-off,   1 MFLOPS 計算機



- 改良された定式化
- カイラル対称性
- 不安定粒子
- 相互作用系
- インクルーシブ崩壊
- ...

10^{18}浮動小数点演算/秒

10 fm (PACS),   4.5 GeV w/ chiral sym. (JLQCD),   富岳 0.5 EFLOPS,   ...

著しく進展した。残されている課題もある

Outline

格子QCDの概要とBの物理での進展、問題点

- 1. イントロダクション
- 2. 格子QCD入門
  - どのようにしてQCDでの期待値を計算するか？
- 3. Bの物理のシミュレーション
  - 何が大変か？　回避策/ 妥協案
- 4. 格子QCD研究の現状
  - (セミ)レプトニック崩壊
- まとめ

格子QCD入門

QCD

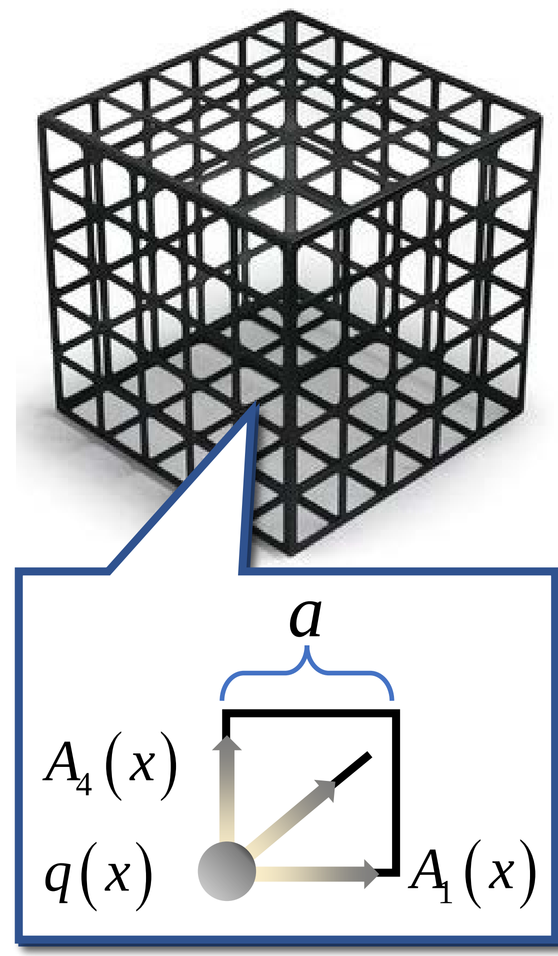
クォークとグルーオンの間に働く強い相互作用を記述する基礎理論

＝カラーを混ぜるゲージ変換についての対称性に基づいた場の量子論

⇒ 非自明な物理

- 漸近自由性
- カイラル対称性の自発的破れ，閉じ込め，…

- 時空は連続
- クォーク場と向きのあるグルーオン場が分布



格子QCDの作用

- 一意ではない！
- 連続時空の極限（連続極限）で消える項を付け加える自由度がある

  ＝ 離散化誤差を削減する/良い性質を持たせるなどのデザインが可能

$$S_{\mathrm{lattice}} = S_{\mathrm{QCD}} + a\Delta S_1 + a^2\Delta S_2 + \ldots$$

  – staggered fermion：最低計算 ~~対称性~~ or ~~局所性~~
  – Wilson fermion：低コスト、カイラル対称性を壊す

    Nielsen-Ninomiya no-go theorem '82

    時空格子では次の４つを両立できない

    局所性 / 並進対称性 / ~~非物理的自由度（ダブラー）~~ / カイラル対称性

  – chiral fermion：高コスト、カイラル対称性を保つ

- Bの物理への応用が特に進んでいるのは
  – staggered fermion を用いた理想的なパラメタでのシミュレーション（米英）
  – chiral fermion を用いた理論的にクリーンな幅広い応用（米英日）

経路積分

正準量子化と並ぶ量子化の指導原理

- 場の古典論：最小作用の原理 ＝ 最小作用の配位が選ばれる
- 場の量子論：積路積分 ＝ 全ての配位が exp[-*S*] の重みで効く

＝ 量子揺らぎ・不確定性

＝ 最小作用の配位が最大寄与 ⇒ 最小作用の原理の拡張

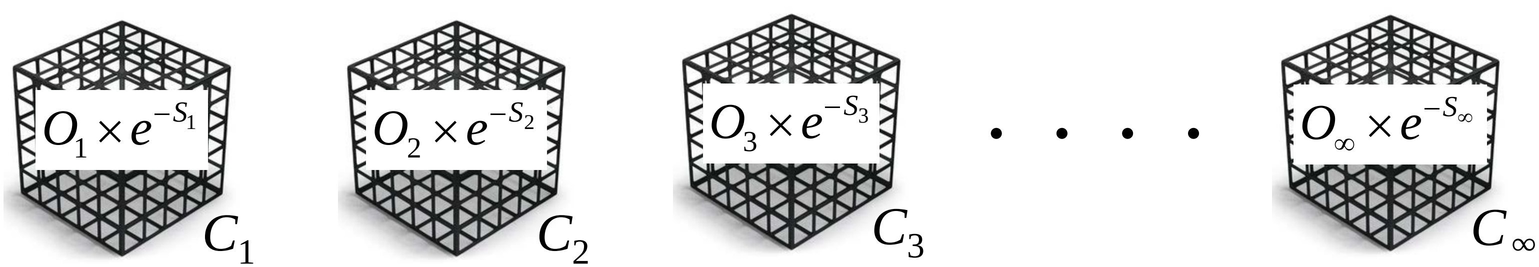
Feynman
(1918-1988)

- 物理量は全ての配位の重み付き平均

$$\langle O \rangle = \int [dA][d\overline{\psi}][d\psi]\, O \exp\left[-S_{\mathrm{lattice}}\right]$$

数値シミュレーションの基礎も与える

経路積分 ＝ 計算機上で生成した配位列での重み付き平均

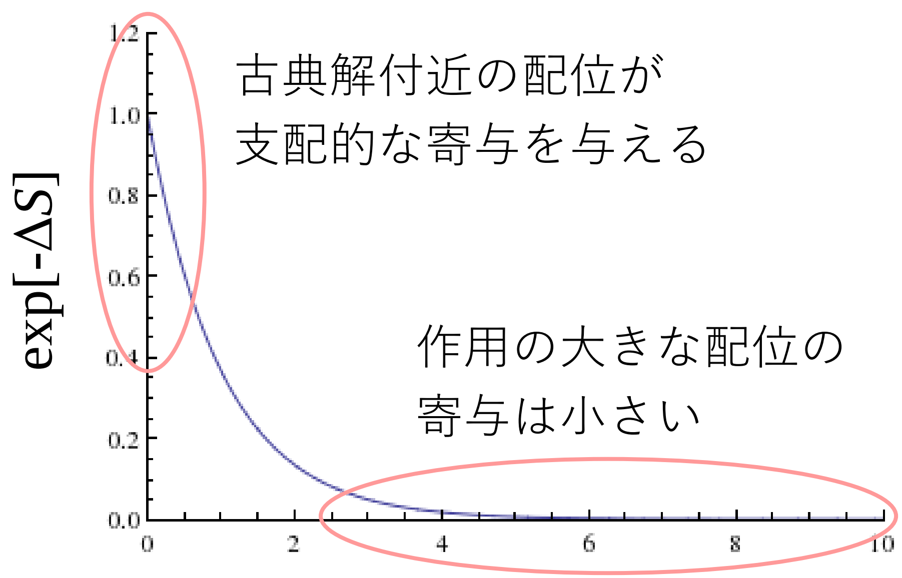


全ての配位が必要か？

- 場は連続変数 ⇒ 可能な配位は無限個 ⇒ 有限時間で生成不可
- 摂動論、実験にも不定性はある：高次補正、測定誤差
- 統計誤差を許せば、有限個の配位を生成すれば良い＝“統計数”

重要度サンプリング

- 配位の寄与は exp[-S] で抑制/増大
- 古典解回りの配位で経路積分を精度良く計算できる
  - 低エネルギーの配位： Metropolis test
  - エネルギー一定： Molecular Dynamics



$\Delta S = S - S_{\mathrm{min}}$

目標精度に応じて統計を貯める： 典型的にはO(100) - O(1000)

主要な演算

クォーク行列

$$S_q = \sum_{a\alpha x}\sum_{b\beta y} \bar{q}_{a\alpha x} D_{a\alpha x, b\beta y} q_{b\beta y}$$

- サイズ＝クォーク場の自由度の巨大な疎行列（近接相互作用）

  e.g. O(10^8) on a 32^3 x 64 lattice !!

- シミュレーションの支配的な時間はクォーク行列の逆 D^{-1} の計算に費やされる

例① 擬クォーク場の使用

計算機ではGrassmann数を扱えない ⇒ 通常の数の「擬クォーク場」に変換

$$\int [dq][d\bar{q}]\exp\left[-S_q\right] = \det[D] = \det\left[D^{-1}\right]^{-1} = \int [d\varphi]\left[d\varphi^\dagger\right]\exp\left[-S_\varphi\right]$$

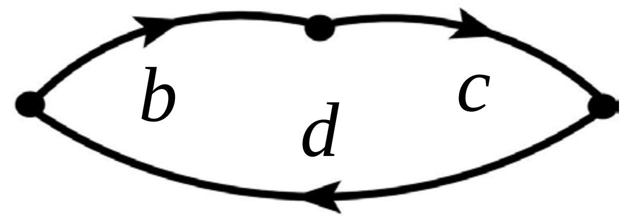
$$S_\varphi = \sum_{a\alpha x}\sum_{b\beta y} \varphi^\dagger{}_{a\alpha x} \left(D^{-1}\right)_{a\alpha x, b\beta y} \varphi_{b\beta y}$$

主要な演算 - QCD mult

例② クォーク伝播関数 ~ D^{-1}

- クォーク行列の逆で与えられる
- ハドロン相関関数の計算の基本ブロック

$B \to D \ell \nu$ 3点関数



Krylov 部分空間法

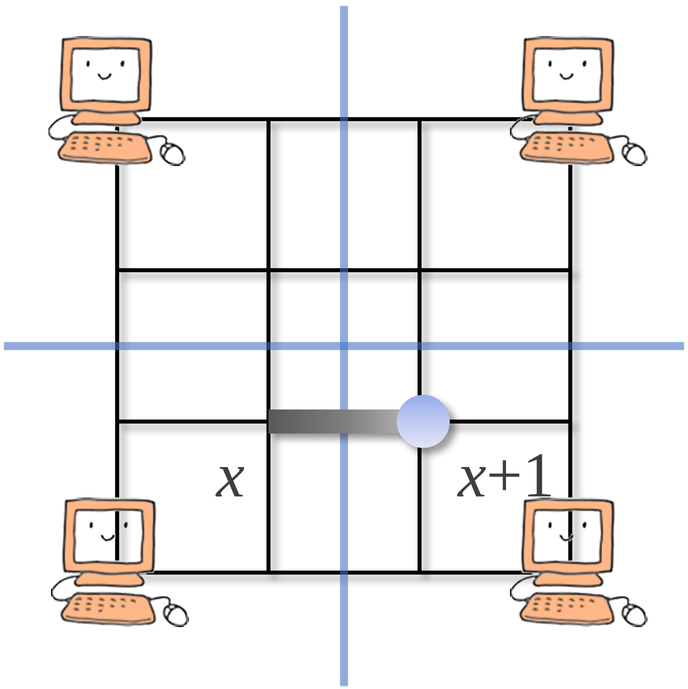
$$Dx = b \quad \Rightarrow \quad x = D^{-1} b$$

- conjugate gradient (residual), generalized minimal residual, …
- Dの掛け算で基底 $\{b, Db, D^2 b, \ldots.\}$を生成、解 x を近似
- Dの掛け算 = “QCD mult”がシミュレーションの基本演算
  - + staggered, Wilson fermion： Dの表式が簡単、QCDのDirac演算子+ α
  - + chiral fermion： Dの表式が複雑 (5 次元格子、巨大疎行列の符号関数)

並列計算

時空格子を等分割して複数の計算ノードに割り当てる

- 理想的には計算時間は “1/計算ノード数”になる
- 必要なデータの転送通信などのオーバーヘッドで理想からずれる



- QCDの並進対称性＋格子を等分割

  各ノードの計算量は一様

- QCDの局所性

  隣接計算ノードのみ通信が必要

$$\left(Dq\right)_x \ni \quad gA^a_{x,\mu}\, q_{x+1}$$

格子QCDは並列計算の理想的なアプリケーション?

エクササイズ

以下のセットアップで QCD mult の計算・通信時間を評価

- 32^4 の格子を 1, $8^4 = 4096$, $16^4 = 65536$ ノードで分割
- Ivy Bridge（224 GFLOPS）を GbE（1 Gbit/sec)で接続

Wilson fermion, 各ノードでの計算・通信時間 (ピーク性能を仮定)

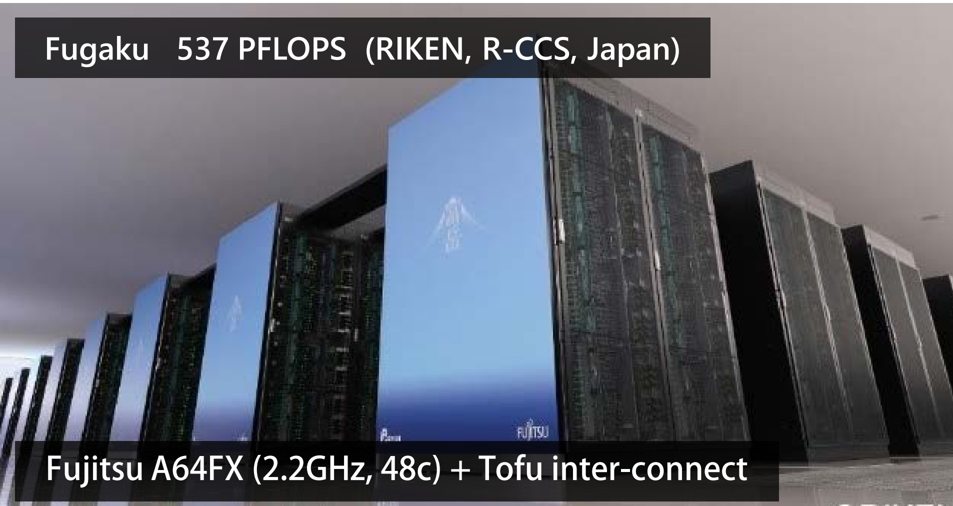
ノード数	部分格子サイズ	演算数 [KFLOP]	通信データ量 [Kbit]	計算時間 [μs]	通信時間 [μs]
1	32^4	1358954.5	0	6066.2	0
$8^4 = 4096$	4^4	331.8	319.5	1.5	319.5
$16^4 = 65536$	2^4	20.7	49.2	0.093	49.2

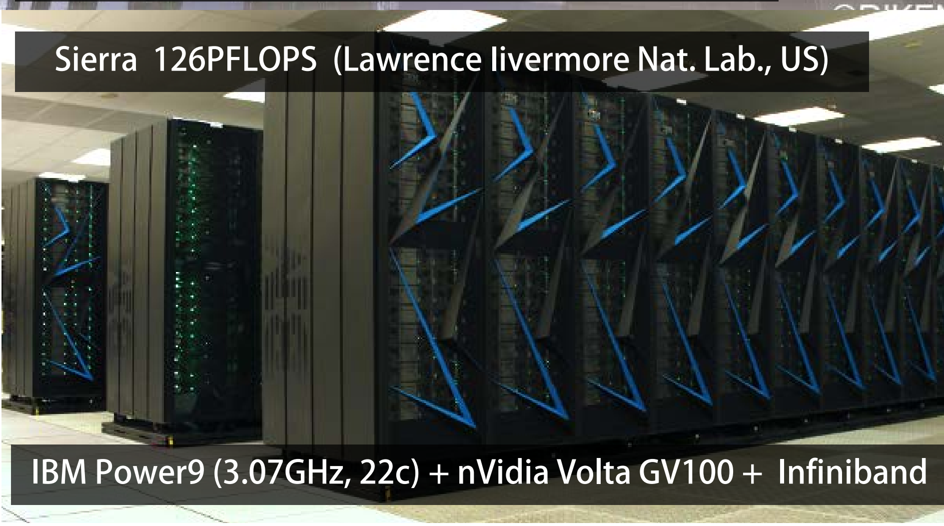
65536ノードを使って123倍のスピードアップ...

CPU時間の99%は通信データ待ちのアイドル状態

計算性能と通信性能のバランスが重要

スーパーコンピュータ





多量の計算ノードを高性能ネットワークで接続 〜 0.1 EFLOPS

格子ＱＣＤは良いアプリケーション

Bの物理のシミュレーション

格子上のボトムクォーク

マルチスケール問題

QCDシミュレーションのスケール

- 階層性のあるクォーク質量

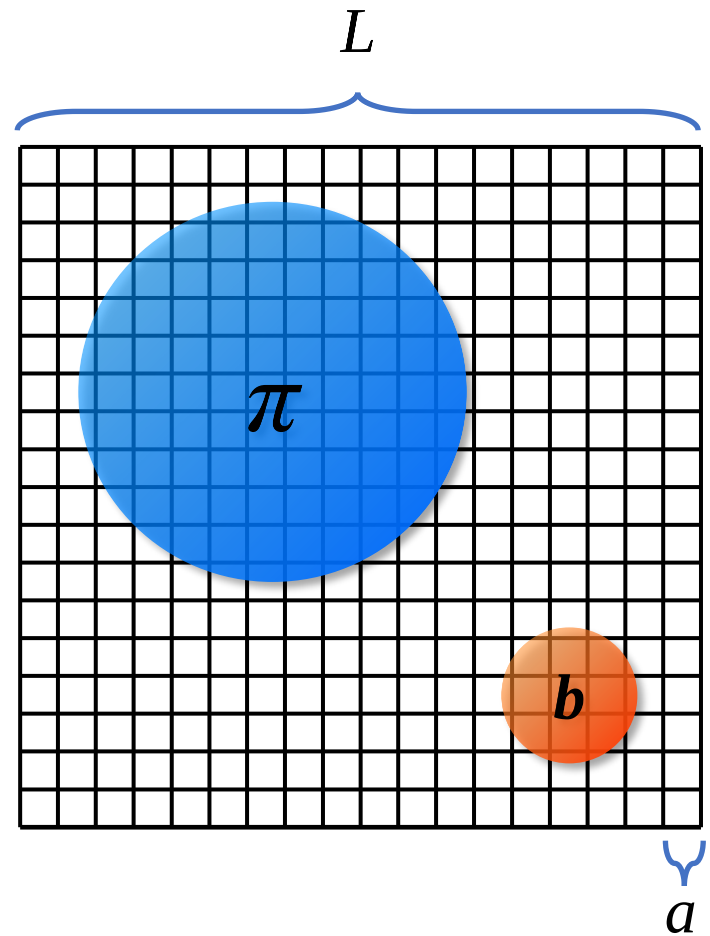
  $m_{ud} << m_s << m_c << m_b$

  m_t ~ 170 GeV ⇒ 摂動でOK

- 格子間隔 a ⇒ 紫外カットオフ a^{-1}
- 格子サイズ L ⇒ 赤外カットオフ L^{-1}
- Λ_{QCD}

$L^{-1} << M_\pi << \ldots << M_B, m_b << a^{-1}$

- *e.g.* $M_\pi L \geq 4$ (ChPT), $am_b \leq 0.5$



$L/a = O(300)$ 以上の解像度が必要

[K中間子の物理 ⇒ M_B/M_K ~ 10 で削減]

計算コスト

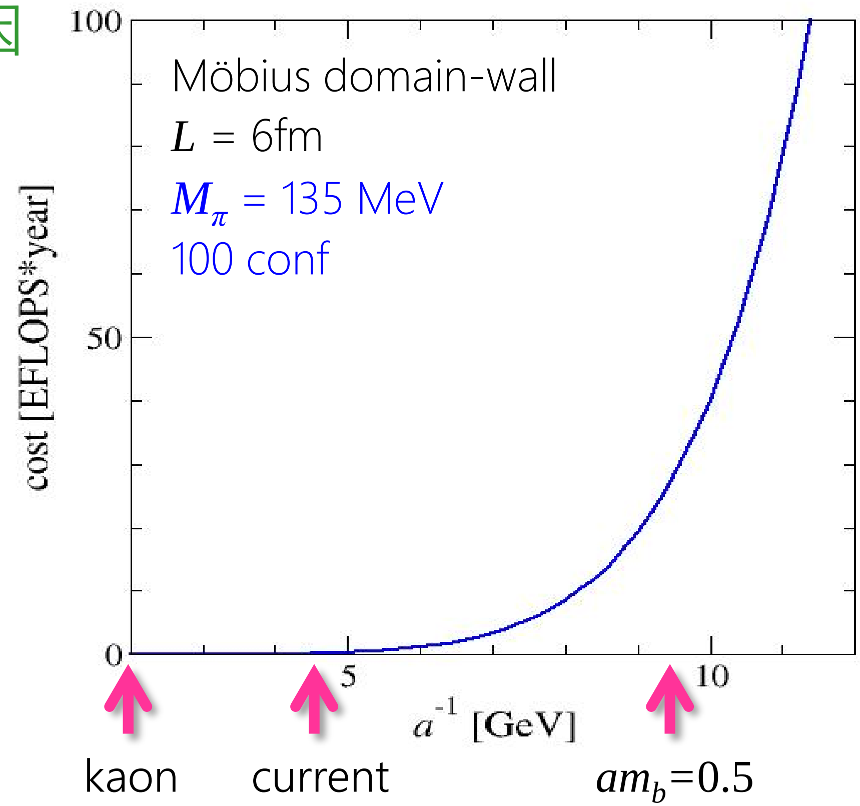
標準的なアルゴリズムでのコスト要因

- 逆解き $Dx=b \Rightarrow 1/am_{ud}$
- 格子点数 $\Rightarrow (L/a)^4$
- 逆解きの回数 $\Rightarrow L/a$
- 自己相関 $\Rightarrow 1/am_{ud}$

$$\text{cost} \propto L^5\, a^{-7}\, M_\pi^{-4}$$

- 有限体積効果の抑制 $M_\pi L = L/M_\pi^{-1} = 4$

$$\text{cost} \propto a^{-7}\, M_\pi^{-9}$$



EFLOPS 計算機が長年必要…

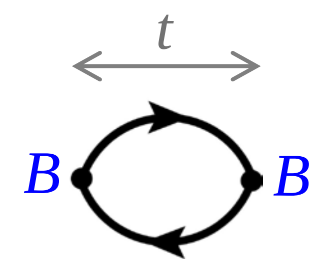
全てが理想的な計算は富岳の先。今は…

- 現実よりも重いπ中間子質量を用いる ⇒ ”カイラル外挿”の制御
- 粗い格子を用いる ⇒ $O((am_b)^n)$ の離散化誤差の制御
- 統計誤差の制御

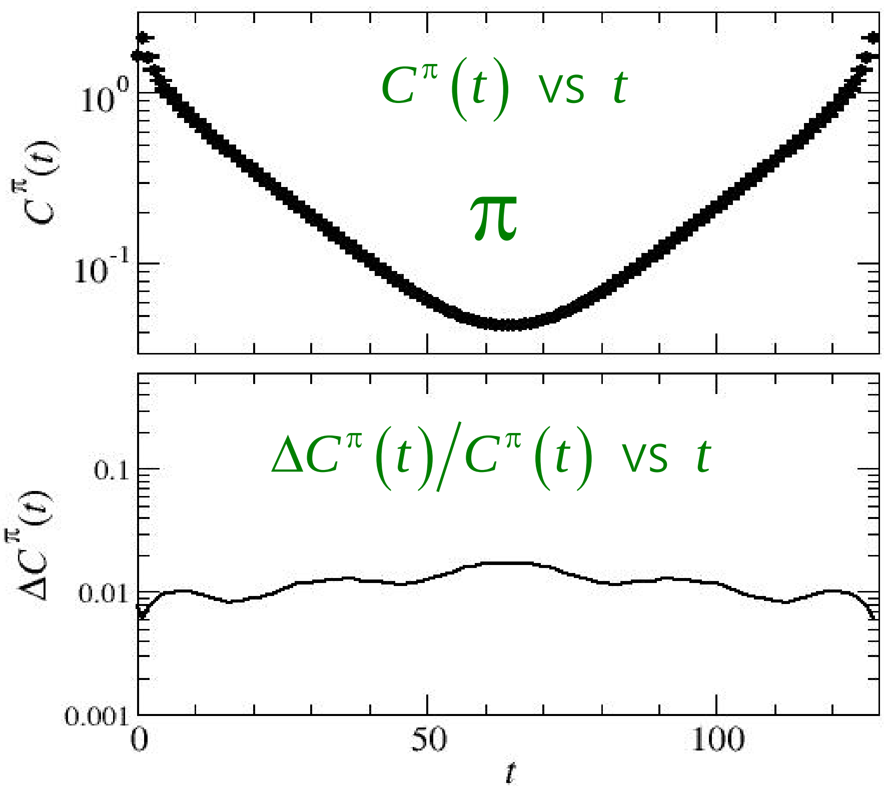
① 統計精度

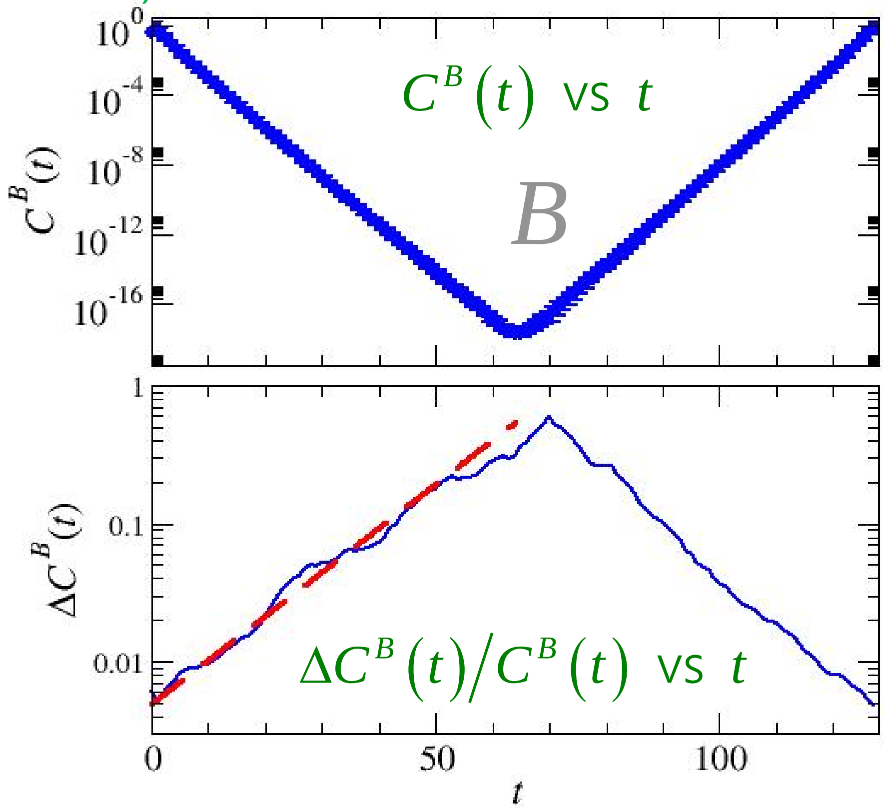
e.g. 崩壊定数を与える2点関数の統計誤差

$$C^P(t) = \left\langle O_P(t) O_P^\dagger(0) \right\rangle = C\exp[-M_P t]\left(1+O\left(e^{-\Delta M t}\right)\right)$$



(JLQCD, Möbius DWF, a^{-1} = 4.5 GeV, M_π =300 MeV)





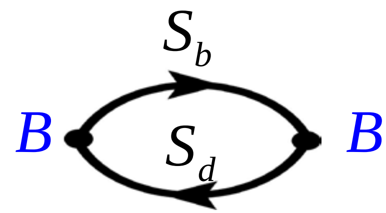
π中間子では相対誤差は一定　　　B中間子では指数的に増大

何故？

① 統計精度

Lepageの議論 '89

- signal $C^B(t) = \left\langle S_d(0,t) S_b^\dagger(0,t) \right\rangle \propto \exp[-M_B t]$



- error $\left(\Delta C^B(t)\right)^2 \sim \left\langle \underline{\left(S_d(0,t) S_b^\dagger(0,t)\right)^\dagger \left(S_d(0,t) S_b^\dagger(0,t)\right)} \right\rangle - \left\langle S_d(0,t) S_b^\dagger(0,t) \right\rangle^2$

4つのプロパゲータで作れる最も軽い２粒子状態は？

$$\uparrow S_d \quad \uparrow S_b \quad \downarrow S_d^\dagger \quad \downarrow S_b^\dagger \sim \eta_b\left(=\bar{b}\gamma_5 b\right) + \pi\left(=\bar{d}\gamma_5 d\right)$$

$$\sim C^{\eta_b+\pi} \sim \exp\left[-\left(M_{\eta_b} + M_\pi\right)t\right]$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta C^B(t)}{C^B(t)} \propto \exp\left[\left(M_B - \frac{M_{\eta_b} + M_\pi}{2}\right)t\right] \qquad \frac{\Delta C^\pi(t)}{C^\pi(t)} = \text{const}$$

- 指数係数＝0.08 (K), 0.30 (D), 0.13 (D_s), 0.51 (B), 0.32 (B_s) $\quad cf.\ M = m_Q + \bar{\Lambda} + O\left(m_Q^{-n}\right)$
- 統計精度の制御：$K \Rightarrow D \Rightarrow B$ と難しい、spectatorを重くすると簡単

$\Rightarrow$ 近年のB_s, D_s, J/ψの格子研究

② カイラル外挿

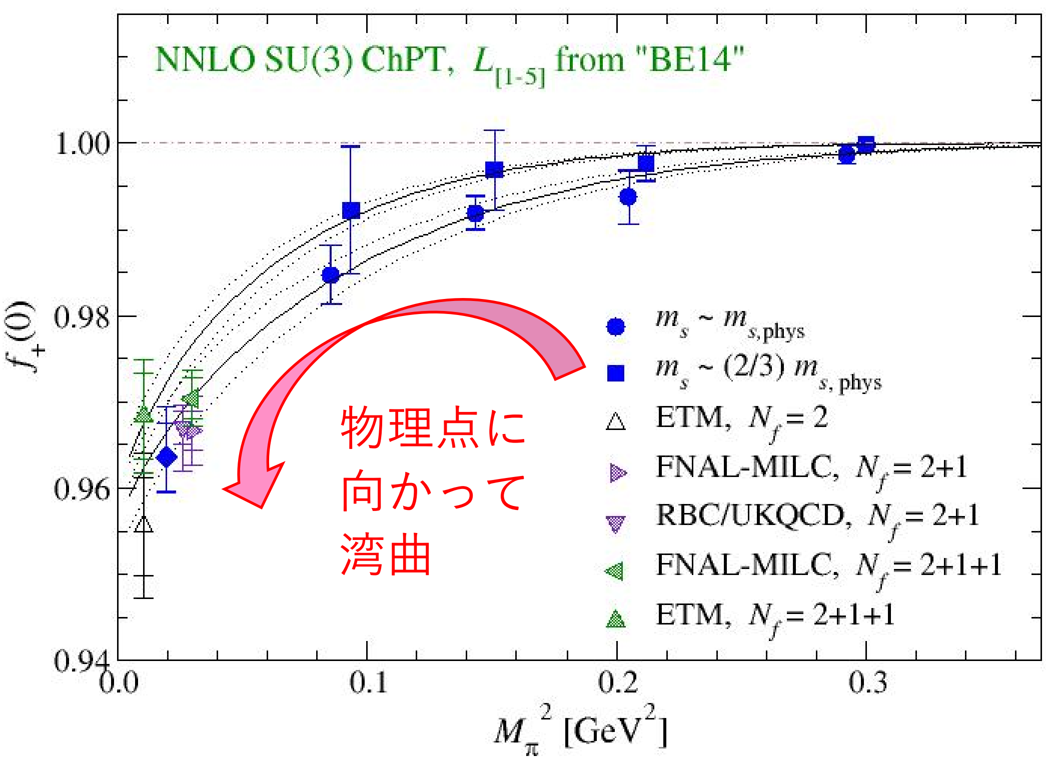
- 物理点 ＝ 現実世界のクォーク質量。ここでは π中間子質量 M_π
- 物理点より重い M_π でシミュレーションを行い、結果を物理点へと外挿
- 計算コストを少なくとも M_π^{-4} で減らせる(!)

② chiral logarithm

e.g. $K \to \pi \ell \nu$ セミレプトニック崩壊の形状因子

$$\langle \pi(p') | V_\mu | K(p) \rangle = (p+p')_\mu f_+(q^2) + (p-p')_\mu f_-(q^2)$$

(JLQCD, overlap, a^{-1} = 1.7 GeV, M_π = 290 - 540 MeV)

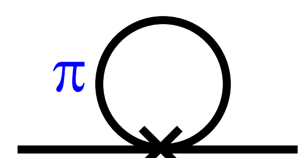


カイラル摂動論

- カイラル対称性に基づき中間子の自由度で書いたQCDの有効理論
- 物理量の M_π 依存性の関数形を予言
- 不定な低エネルギー定数を伴う

chiral logarithm

- π中間子のループダイアグラムによる非解析的依存性



$$M_\pi^2 \ln\left[M_\pi^2\right]$$

② カイラル外挿

- 物理点 = 現実世界のクォーク質量。ここでは π中間子質量 M_π
- 物理点より重い M_π でシミュレーションを行い、結果を物理点へと外挿
- 計算コストを少なくとも M_π^{-4} で減らせる(!)

- 非解析的で不定パラメタを伴うchiral logが制御を難しくする

$$\frac{1}{16\pi^2 f^2} M_\pi^2 \ln\left[M_\pi^2\right]$$

  – カイラル外挿は $B \to \pi\ell\nu$ の最大系統誤差の要因の一つ
  – できるだけ物理点に近いシミュレーションが望ましい

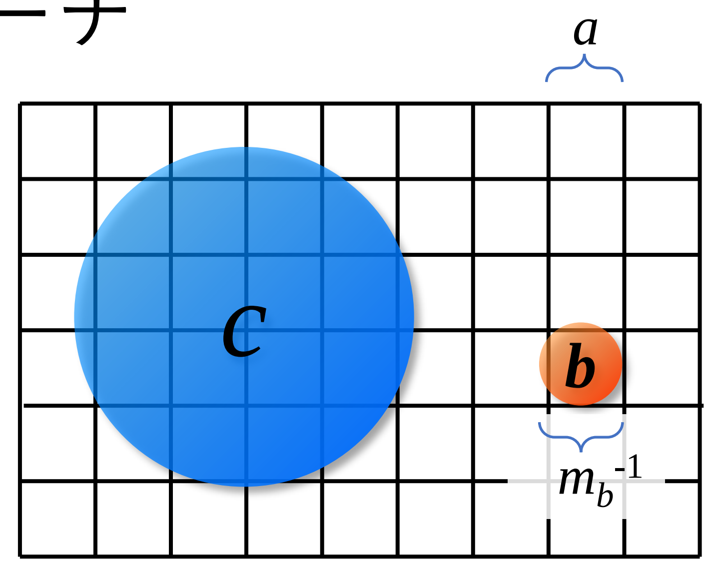
- 対称性によってchiral logが抑制される場合もある

  e.g. $K \to \pi\ell\nu$ 形状因子はカイラル対称性により $(m_{ud} - m_s)^2$ で抑制

  $B \to D^{(*)}\ell\nu$ 形状因子は重クォーク対称性により $(M_{D^*} - M_D)^2$ で抑制

③ 離散化誤差の制御

相対論的アプローチ



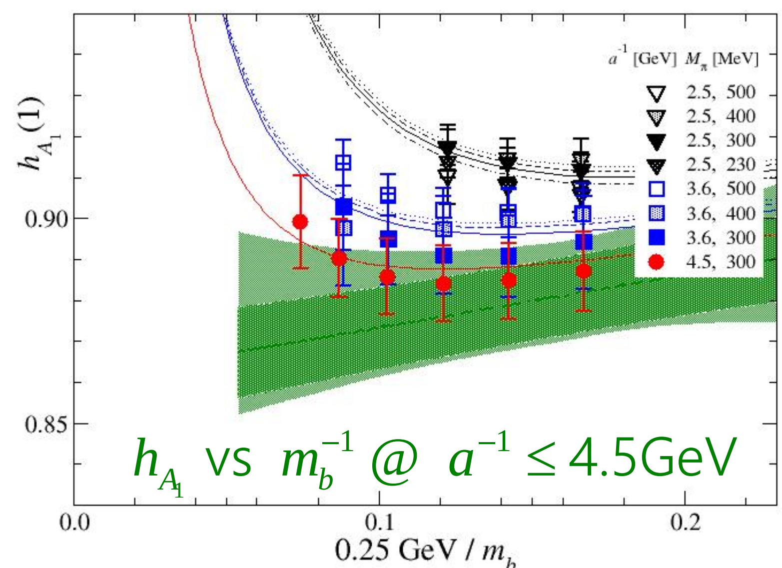
QCD の直接シミュレーション

- 全てのクォークにQCD作用を用いる
- 現在 $a^{-1} \leq$ 5GeV、チャームの物理は OK

非物理的なボトムクォーク質量

- 現状では、$a^{-1} >> m_b$ は難しい
  - 支配的な誤差 ～ $O((am_b)^n)$ 離散化誤差
  - $m_b < a^{-1}$ に制限
  - 結果を物理点 ($m_{b,\mathrm{phys}}$) へ外挿

(JLQCD @ Lattice '21)

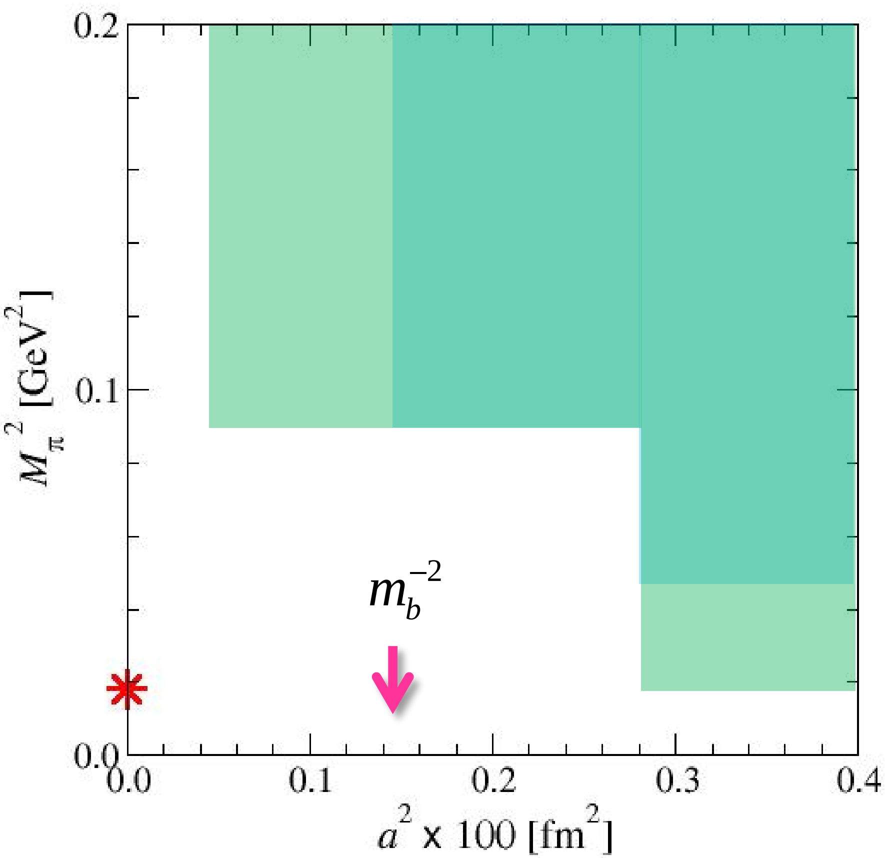


- 物理的な m_b 依存性は一般に大きくない
- $O((am_b)^n)$は有意、だが大きくない

③ 離散化誤差の制御

相対論的アプローチ

富岳時代のシミュレーション



e.g. セミレプトニック崩壊の研究

- 粗い格子 (a^{-1}~3.5GeV) で物理点
  - chiral log、 M_π 依存性の精査
  - IRの物理
- 非物理点 (M_π ~300MeV) で$a^{-1} \geq m_b$
  - m_b直上でのシミュレーションが可能
  - m_b 依存性、$O((am_b)^n)$ の誤差の精査
- 富岳以外の0.1EFOPS計算機にも期待

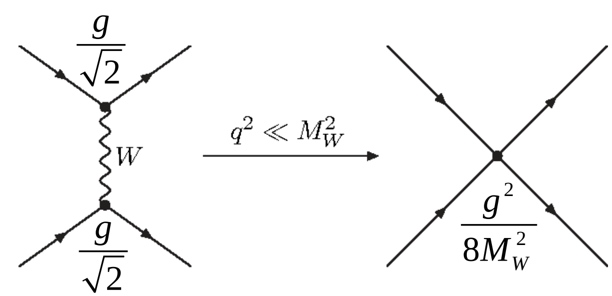
崩壊定数、混合も含めて数％以下の計算精度がターゲット

③ 離散化誤差の制御

有効理論に基づいたアプローチ

有効理論 (EFT)

- 理論の自由度を “relevant” と “irrelevant” に分ける
- ターゲットの物理を “relevant” な自由度で記述する
- Lagrangian
  - “relevant” な自由度の有効相互作用
  - “irrelevant” な自由度で決まる結合定数



- *e.g.* β崩壊の Fermi 理論
  - W の自由度を積分 ⇒ M_W を含む結合定数をもつ4 Fermi 相互作用

有効理論に基づいたアプローチ

- 重いクォークに有効理論の作用を用いる： 重クォーク有効理論 (HQET)、など
- m_b直上のシミュレーションが可能
- 有効理論がQCDの物理を記述するようにパラメタ調整が必要（マッチング）

  ⇒ 相対論的アプローチにない、評価・削減の難しい系統誤差

③ heavy quark effective theory (HQET)

Eichten '88, Eichten – Hill '90

HQETでの heavy-light meson の描像

= 自由な重いクォーク Q + 軽い自由度 (q と g)

- 軽い自由度による運動量変化 ~ O(Λ_{QCD}) << m_Q

$$p = \cancel{m_Q v} + k$$

← 残差運動量 ~ O(Λ_{QCD})

"速度" ベクトル : $v^2=1$

- 系を残差運動量で記述 ⇒ 理論からスケール m_Q を"除去"

heavy-light meson

重いクォークの場 (Dirac表示)

① 自由運動を記述するファクターを除去： m_Qの除去

$$\psi_{Q,v} = e^{im_Q vx} \begin{pmatrix} \psi_{Q,v,+} \\ \psi_{Q,v,-} \end{pmatrix}$$

② 系の物理を"粒子"成分で記述： 自由度の選定

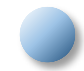
③ $O(1/m_Q)$の小さい補正。粒子成分で書き直す

⇒ Lagrangian, 複合演算子の系統的な $1/m_Q$展開を与える（重クォーク展開）

③ heavy quark effective theory (HQET)

Lagrangianの重クォーク展開

LO $\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}_{Q,v,+}\left(ivD\right)\psi_{Q,v,+}$



static heavy quark

重クォーク対称性

静的クォークの極限 ($m_Q \to \infty$) での対称性

– フレーバー対称性：フレーバーの入れ替えに対して不変
– スピン対称性：相互作用はスピン非依存

NLO $\mathcal{L}_1 = -\bar{\psi}_{Q,v,+}\dfrac{D_\perp^2}{2m_Q}\psi_{Q,v,+} - g\bar{\psi}_{Q,v,+}\dfrac{\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu}}{4m_Q}\psi_{Q,v,+}$

フレーバー対称性を破る補正　　スピン対称性を破る補正

– m_b 直上でのシミュレーションが可能
– QCDとのマッチングが必要：通常は摂動的 ⇔ ALPHA '03
– “heavy-light” system にしか使えない：~~quarkonium~~, …

③ non-relativistic QCD (NRQCD)

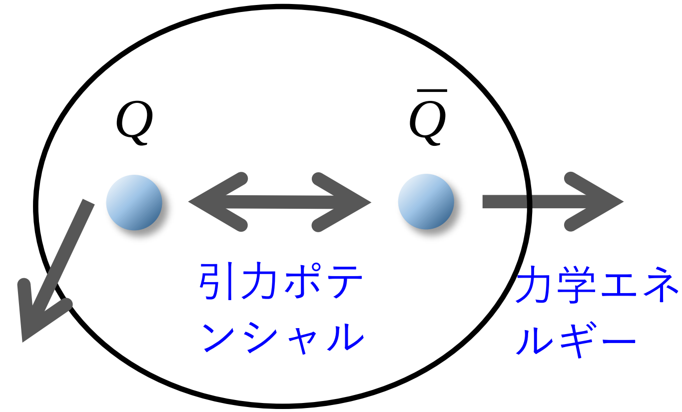
Caswell – Lepage '86, Lepage – Thacker '88

NRQCDでの heavy-heavy mesonの描像

- クーロン型引力ポテンシャル
- 非相対論的な力学エネルギー

⇒ バランスしてハドロンサイズを維持

$$\left\langle \frac{\alpha_s}{r} \right\rangle \sim \left\langle \frac{p^2}{m_Q} \right\rangle \underset{\langle p \rangle \langle r \rangle \sim 1}{\Rightarrow} \langle v \rangle = O(\alpha_s)$$



heavy-heavy meson

速度 v についてのNRQCD展開

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}_{Q,v,+} (ivD) \psi_{Q,v,+} - \bar{\psi}_{Q,v,+} \frac{D_\perp^2}{2m_Q} \psi_{Q,v,+}$$

- HQET では sub-leading
- 力学エネルギーの重要性

- lattice NRQCD： プロパゲータから $a \to 0$で発散する寄与
- 連続時空の極限がとれない!

③ Fermilab approach

El-Khadra – Kronfeld – Mackenzie ‘96

相対論的なWilsonクォーク作用をHQETとして再解釈

- 非等方格子上での$O(a)$誤差を取り除いたWilsonクォーク作用

$$\bar{\psi}_Q \left\{ \underbrace{\overbrace{\gamma_0 D_0 + \zeta \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{D}}^{\text{Dirac 演算子}}}_{\psi^\dagger_{Q,v,+}(iD_0)\psi_{Q,v,+}} + m_Q \overbrace{- \frac{a r_t}{2} D_0^2 \underbrace{- \frac{a r_s}{2} \boldsymbol{D}^2}_{\psi^\dagger_{Q,v,+}\frac{D_\perp^2}{2m_Q}\psi_{Q,v,+}}}^{\text{ダブラーを回避}} + \underbrace{\overbrace{\frac{iac_{\mathrm{SW}}}{4} \boldsymbol{\sigma}_{ij} F_{ij} + \frac{iac_{\mathrm{SW}}}{4} \boldsymbol{\sigma}_{0i} F_{oi}}^{O(a)\text{ の離散化誤差を除去}}}_{g\psi^\dagger_{Q,v,+}\frac{\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu}}{4m_Q}\psi_{Q,v,+}} \right\} \psi_Q$$

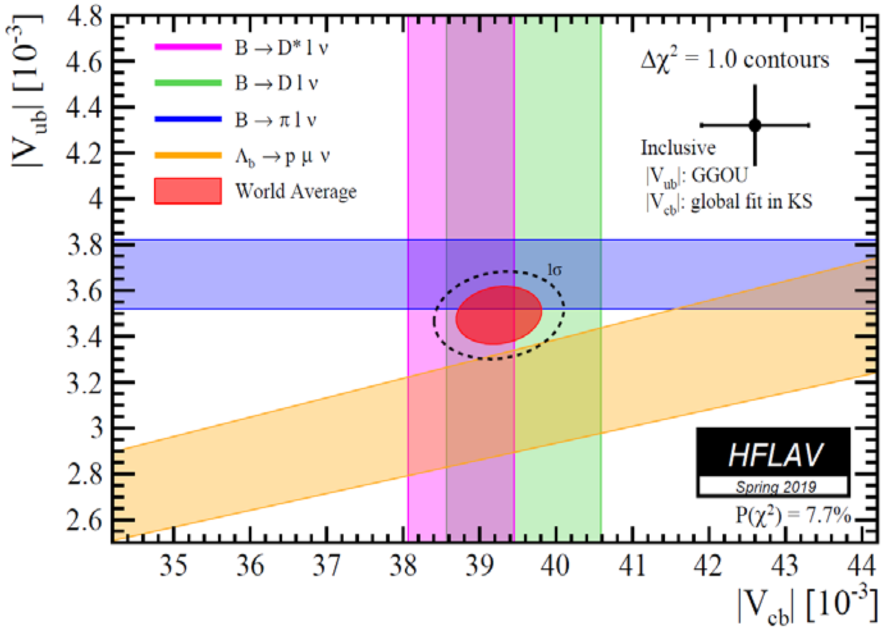
- HQET の実装手法の一つ
  - HQET： 4 成分Diracスピノル ⇒ “粒子”に対応する 2 成分
  - Fermilab approach： 4 ⇒ 4 成分で重いクォークを記述
    “relevant“な自由度が少し異なるHQETの実装手法

- HQETの長短所： m_b直上 / 系統的な展開 / 要マッチング / heavy-lightのみ
- Wilsonクォークの知見、プログラムを流用できる

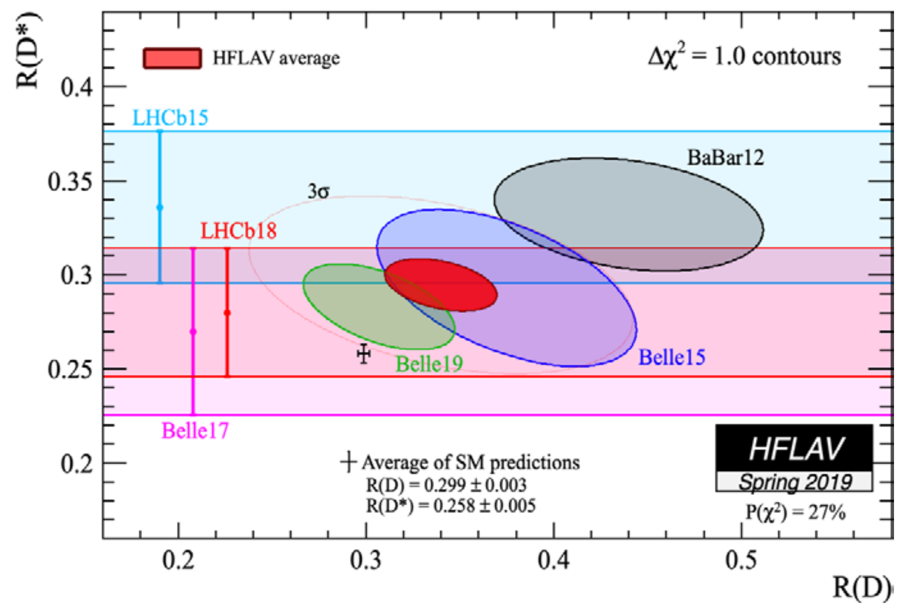
格子QCD研究の現状

２つのトピックに関連して

小林益川行列要素の決定・矛盾



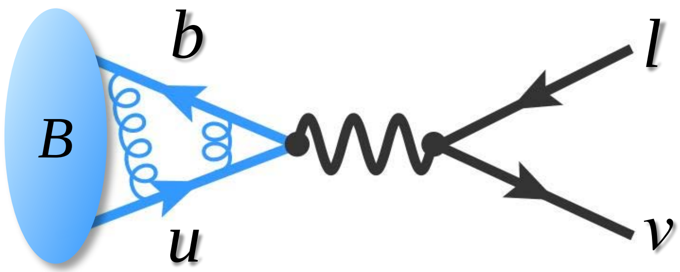
新物理のヒント？(LFUV)



参考文献

- “FLAG Review 2019”, Flavor Lattice Averaging Group (FLAG), EPJ C80 (2020) 113
  フレーバー物理に関する格子計算のレビュー、格付け、世界平均
- “The Belle II Physics Book”, Belle II Theory Interface Platform (B2TiP), PTEP 123C (2019) 01: Belle IIの測定、理論インプット、新物理探索へのインパクト

レプトニック崩壊



$$\langle 0|A_\mu|B(p)\rangle = ip_\mu f_B$$

$$\Gamma(B\to l\nu_l) = \frac{G_F^2}{8\pi} M_B m_l^2 \left(1-\frac{m_l^2}{M_B^2}\right)^2 f_B^2 |V_{ub}|^2$$

- ハドロン行列要素 ~ 崩壊定数
  - 格子間隔とクォーク質量に依存する定数 ⇒ 連続時空と物理点へ外挿

$$f_B = f_{B,\text{tree}}\left\{1+g_{B^*B\pi}\text{"HMChPT log"}+O\left(m_q\text{'s}\right)+O\left(a^k\right)\right\}$$

- 各シミュレーション点での計算は容易
  - “QCD”のパリティ対称性 ⇒ 軸性ベクトル A_μ のみ効く
  - 簡単な 2 点関数を計算 $\left\langle A_4^{\text{lat}\dagger}(t)\,A_4^{\text{lat}}(0)\right\rangle$

- 実験は簡単ではなさそう ~ ヘリシティ抑制

$\mathrm{Br}(B\to\tau\nu) = 0.01\%$, $\mathrm{Br}(B\to\mu\nu) = 0.0001\%$,

$B_{(s)}$中間子崩壊定数

Flavor Lattice Averaging Group (FLAG) によるレビュー '19

Collaboration	Ref.	N_f	public	contin	chiral	finite	renorm	heavy	f_{B^+}	f_{B^0}	f_B	f_{B_s}
FNAL/MILC 17	[5]	2+1+1	A	★	★	★	★	✓	189.4(1.4)	190.5(1.3)	189.9(1.4)	230.7(1.2)
HPQCD 17A	[72]	2+1+1	A	★	★	★	○	✓	–	–	196(6)	236(7)
ETM 16B	[27]	2+1+1	A	★	○	○	○	✓	–	–	193(6)	229(5)
ETM 13E	[551]	2+1+1	C	★	○	○	○	✓	–	–	196(9)	235(9)
HPQCD 13	[71]	2+1+1	A	★	★	★	○	✓	184(4)	188(4)	186(4)	224(5)
RBC/UKQCD 14	[76]	2+1	A	○	○	○	○	✓	195.6(14.9)	199.5(12.6)	–	235.4(12.2)
RBC/UKQCD 14A	[75]	2+1	A	○	○	○	○	✓	–	–	219(31)	264(37)
RBC/UKQCD 13A	[552]	2+1	C	○	○	○	○	✓	–	–	191(6)$^{\diamond}_{\mathrm{stat}}$	233(5)$^{\diamond}_{\mathrm{stat}}$
HPQCD 12	[74]	2+1	A	○	○	○	○	✓	–	–	191(9)	228(10)
HPQCD 12	[74]	2+1	A	○	○	○	○	✓	–	–	189(4)$^{\triangle}$	–
HPQCD 11A	[73]	2+1	A	★	○	★	★	✓	–	–	–	225(4)$^{\nabla}$
FNAL/MILC 11	[63]	2+1	A	○	○	★	○	✓	197(9)	–	–	242(10)
HPQCD 09	[78]	2+1	A	○	○	○	○	✓	–	–	190(13)$^{\bullet}$	231(15)$^{\bullet}$
ALPHA 14	[77]	2	A	★	★	★	★	✓	–	–	186(13)	224(14)

relativistic

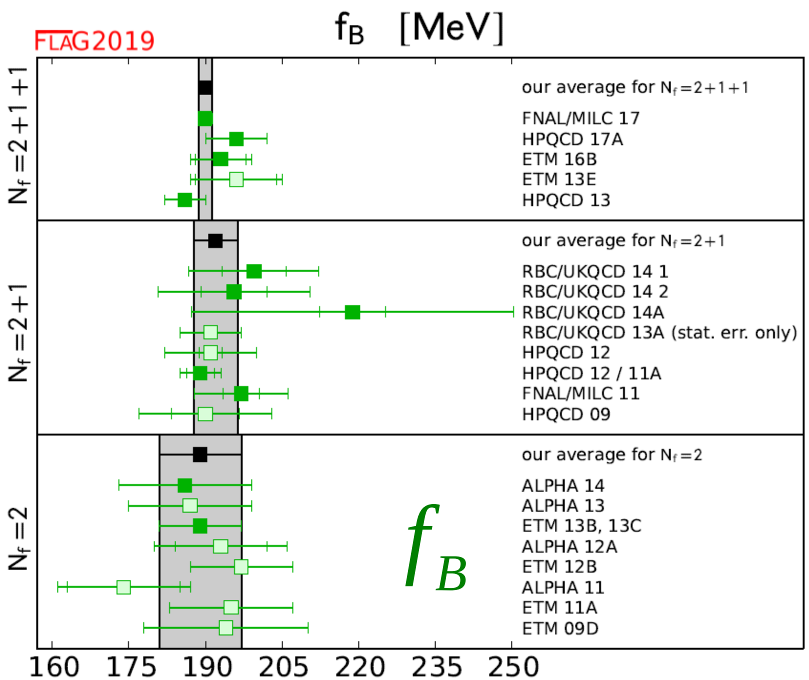
HQET static

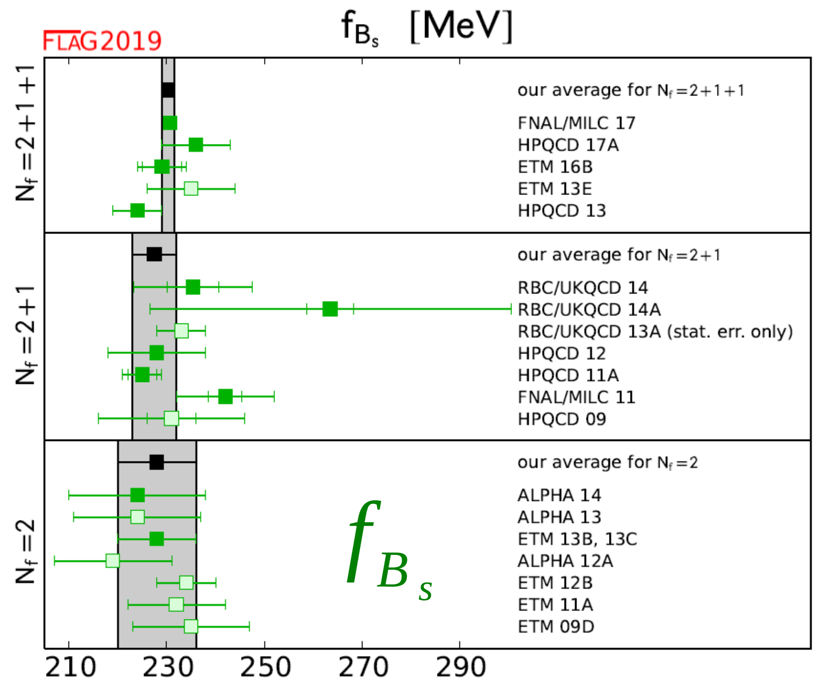
NRQCD

Fermilab

- 現時点では、それぞれのアプローチに一長一短がある
- 異なるアプローチを用いて整合する結果を得ている (次ページも参照)

$B_{(s)}$中間子崩壊定数

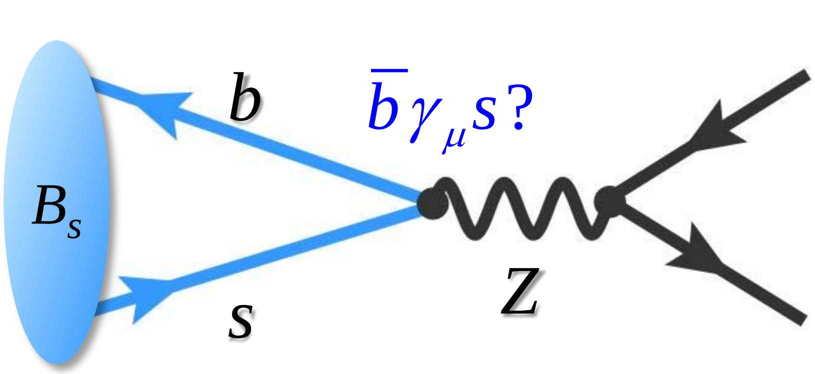


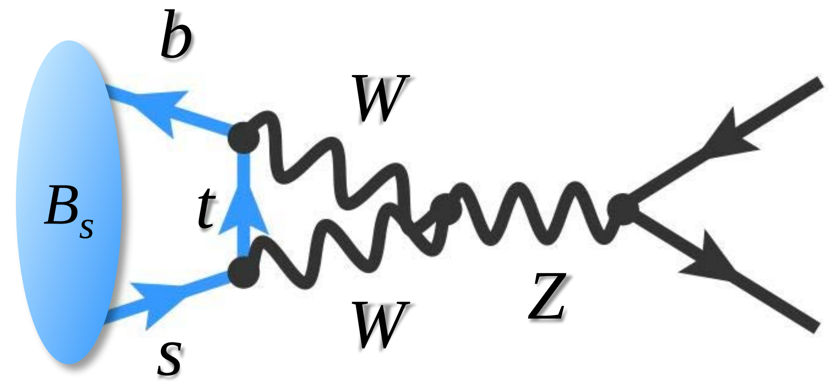


- 平均は Fermilab/MILC '17 で決まっている – もっと多くの高精度計算が必要
- $|V_{ub}| = 4.05(3)_{\mathrm{lat},Nf=4}(64)_{\mathrm{ex}} \times 10^3$
  - 実験から大きい誤差 (16%) (Belle, BaBar)
  - Belle IIによって格段に高精度化： ≤ 数%(?), competitive to $B \to \pi \ell \nu$ (4%)

    (Belle II Theory Interface Platform (B2TiP) '18)
  - $|V_{ub}|$ の独立決定

flavor changing neutral current





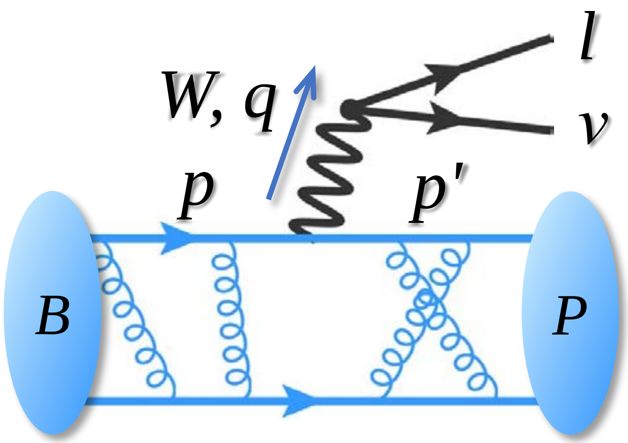
$$\Gamma\left(B_q \to l^+ l^-\right) \propto \frac{G_F^2 g^2}{64\pi^3} M_{Bq} m_l^2 \sqrt{1-4\frac{m_l^2}{M_B^2}}\, f_{Bq}^2 \left|V_{tb}^* V_{tq}\right|^2$$

- 標準理論ではループ抑制、新物理の良いプローブ
- CMS ‘13, LHCb ’13, ATLAS ‘16, ... が測定
  - $\mathrm{Br}(B_s \to \mu\mu) = 2.9(0.4) \times 10^{-9}$, $\mathrm{Br}(B_d \to \mu\mu) = 0.5(1.6) \times 10^{-10}$
- 標準理論 $\mathrm{Br}(B_s \to \mu\mu) = 3.65(23) \times 10^{-9}$

f_{Bq} は(現)実験に見合う精度で決まっている

セミレプトニック崩壊

e.g. 擬スカラー中間子への崩壊 $B \to P\ell\nu$ ($P=\pi$, D)



- 力学変数：Wボソンが運ぶ運動量
  - 運動量遷移 $q^2 = (p - p')^2$
  - 反跳パラメタ $w = vv'$

    $v = p/M_B$, $v'=p'/M_{D*}$ no $O(m_Q)$
  - 反跳ゼロの極限 ($\mathbf{p}=\mathbf{p}'=\mathbf{0}$)

    $q^2{}_{\text{max}} = (M_B - M_P)^2$, $w_{\text{min}} = 1$

微分崩壊率

$$\frac{d\Gamma}{dq^2} = \frac{G_F^2}{24\pi^3}\left|V_{qb}\right|^2 \left\{c_+\left(M_B, M_P, m_\ell, q^2\right) f_+\left(q^2\right) + m_\ell^2 c_0\left(M_B, M_P, m_\ell, q^2\right) f_0\left(q^2\right)\right\}$$

- 崩壊イベントのエネルギー・角度分布を記述
- スカラー偏極の寄与は m_ℓ^2 で抑制

  $\Rightarrow$ $B \to P\tau\nu$: 拡張されたヒッグスセクターの良いプローブ

ハドロン行列要素と形状因子

擬スカラー中間子への崩壊 $B \to P\ell\nu$ $(P=\pi, D)$

$$\left\langle P \middle| V_\mu \middle| B \right\rangle = \left(p + p' + \frac{M_B^2 - M_P^2}{q^2} q \right)_\mu f_+(q^2) + \frac{M_B^2 - M_P^2}{q^2} q_\mu f_0(q^2)$$

- ２つの形状因子 f_+ と f_0, q^2 (w)の関数
- QCDのパリティ対称性 ⇒ V_μ のみが効く
- レプトニック崩壊と相補的な新物理のプローブ

ベクトル中間子への崩壊 $B \to V\ell\nu$ $(V=\rho, D^*)$

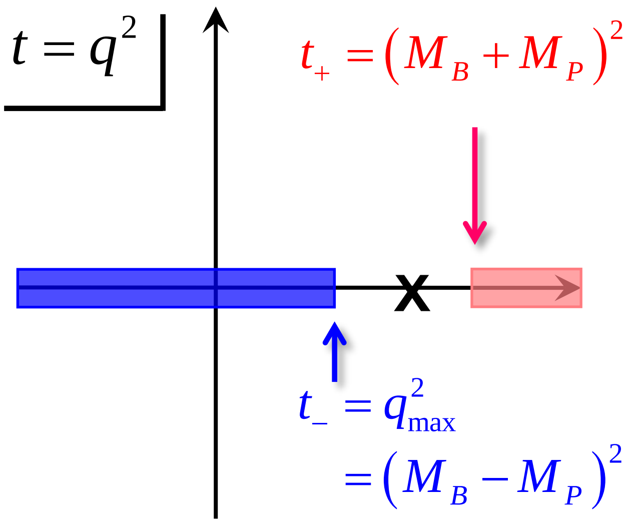
$$\left\langle V \middle| V_\mu \middle| B \right\rangle = i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon'^{*\nu} v'^{\rho} v^{\sigma} h_V(w)$$

$$\left\langle V \middle| A_\mu \middle| B \right\rangle = \varepsilon'^{*}_{\mu}(1+w) h_{A_1}(w) - \varepsilon'^{*} v \left\{ v_\mu h_{A_2}(w) + v_\mu h_{A_3}(w) \right\}$$

- 4つの形状因子 h_V, h_{A1}, h_{A2}, h_{A3}
- V_μ と A_μ の両方が効く

運動量遷移依存性の記述

q^2 実軸上の解析性

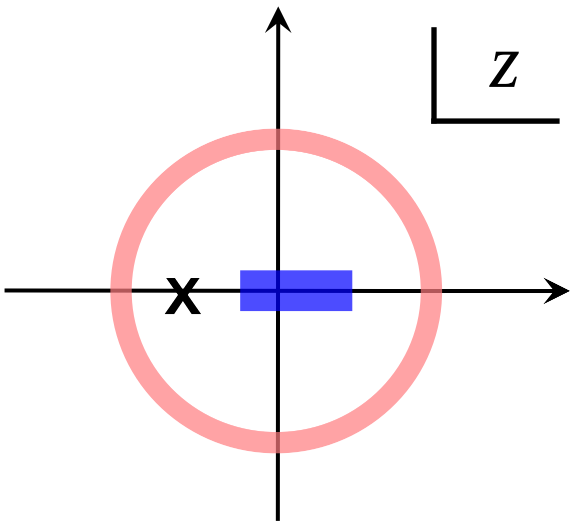


z-パラメタによるマッピング

$$z = \frac{\sqrt{t_+ - t} - \sqrt{t_+ - t_0}}{\sqrt{t_+ - t} + \sqrt{t_+ - t_0}}$$

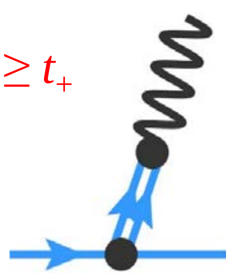
t_0 = 調節できるパラメタ

複素 z 平面



- セミレプトニック領域 $t \le t_-$ ⇒ 形状因子は解析的
- 大きいtではプロダクションモード $W \to BP$ が開く ⇒ ブランチカット @ $t \ge t_+$
- 中間領域 $t_- \le t \le t_+$ ⇒ bq 束縛状態による極
- セミレプトニック領域 ⇒ 実軸上の小領域

$$\frac{c}{1 - q^2 / M^2_{\text{pole}}}$$



運動量遷移依存性の記述

z-パラメタ展開

- zが小さいため、急速に収束すると期待 / 典型的には z^2, z^3 まで
- 現象論的模型に依存しないパラメトリゼーション
- 理論のユニタリ性（＋現象論的模型）から展開係数のバウンドを導出できる

$$f_+(t) = \frac{1}{B(t)\phi(t,t_0)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t_0)\, z(t,t_0)^n$$

e.g. Bourrely-Caprini-Lellouch (BCL) parametrization

- Blaschke factor $B(t) = 1\text{-}q^2/M_{\mathrm{pole}}^2$: 束縛状態の極による特異性を除去
- outer function $\phi(t,t_0) = 1$： 展開係数のバウンドの形を変える

Boyd-Grinstein-Lebed (BGL) param. : 複雑なΦ、簡単なバウンド

Caprini-Lellouch-Neubert (CLN) param. : HQETの予言式を"仮定"

$B\to\pi\ell\nu$ 崩壊

3つのやや古い計算

HPQCD '06

- NRQCD b
- $M_\pi \gtrsim$ 400MeV

RBC/UKQCD '15

- "Fermilab" b
- $M_\pi \gtrsim$ 270MeV, $a^{-1}\lesssim$ 2.3GeV

Fermilab/MILC '15

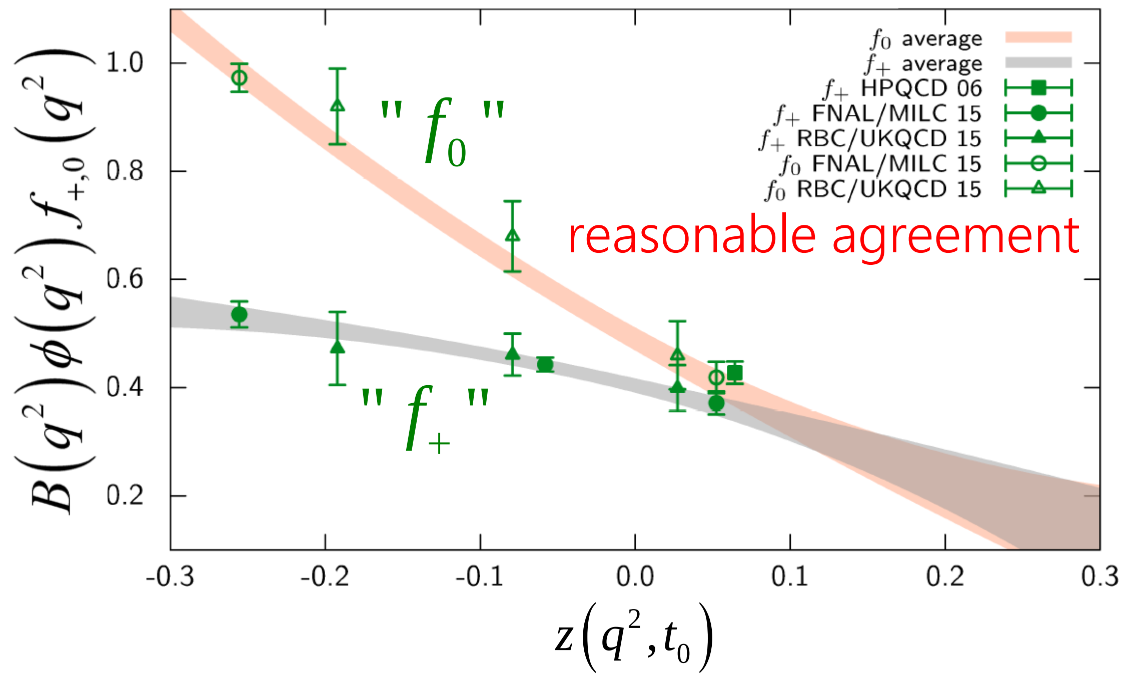
- "Fermilab" b
- $M_\pi\gtrsim$ 165MeV, $a^{-1}\lesssim$ 4.5GeV

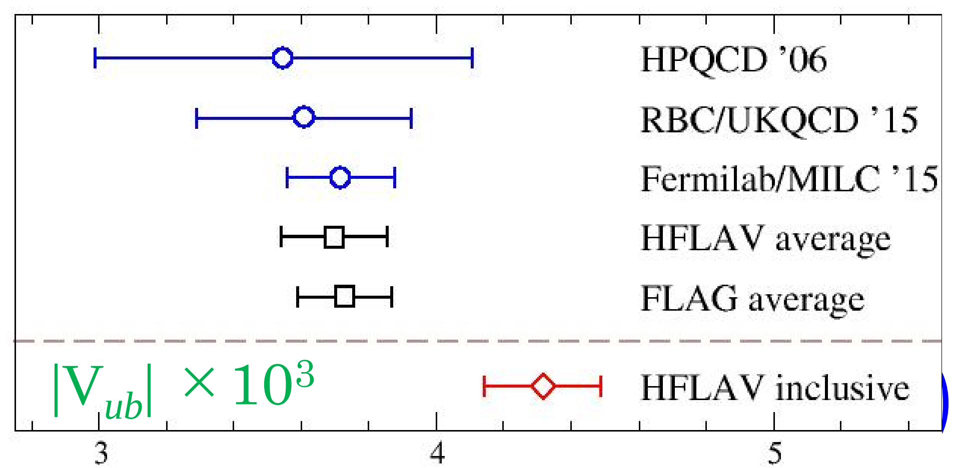
$|V_{ub}|$ = 3.70(10)$_{\rm ex}$(12)$_{\rm th}$ $\times 10^3$

- $B\to\ell\nu$ より4倍良い
- 理論・実験の誤差は同程度
  ⇒ Belle II で格段に改善
- Fermilab/MILCで平均が決まっている

$$\frac{d\Gamma}{dq^2}=\frac{G_F^2}{24\pi^3}\left|V_{qb}\right|^2\left\{c_+\left(M_B,M_P,m_\ell,q^2\right)\right.$$

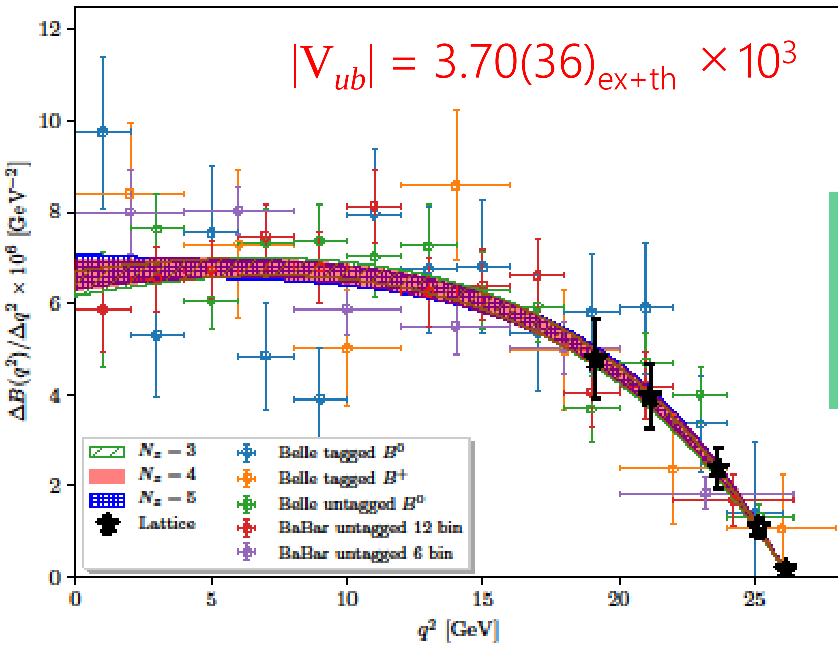
"regular part" of FFs FLAG '19





$B \to \pi \ell \nu$ 崩壊

JLQCD, full paper soon： カイラルフェルミオン＋相対論的アプローチ



- Fermilab/MILCの２倍の誤差
- 統計とカイラル外挿が最大誤差

富岳 成果創出加速プログラム

- FY2022：≤５%精度
- その後、Belle IIの最終精度へ

RBC/UKQCD @ Lattice 21： $M_\pi \gtrsim$ 230MeV, $a^{-1} \lesssim$ 2.8GeV

Fermilab/MILC on-going： 相対論的アプローチ、$M_\pi \leq$ 165MeV

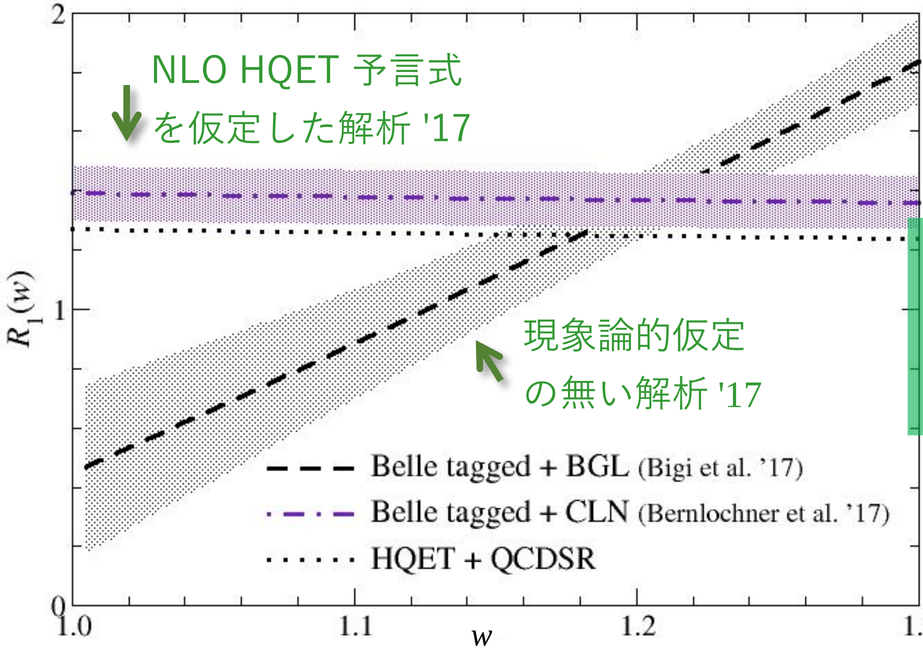
最近の計算は統計とカイラル外挿がネック ⇒ 今後５年間で大きく進むはず

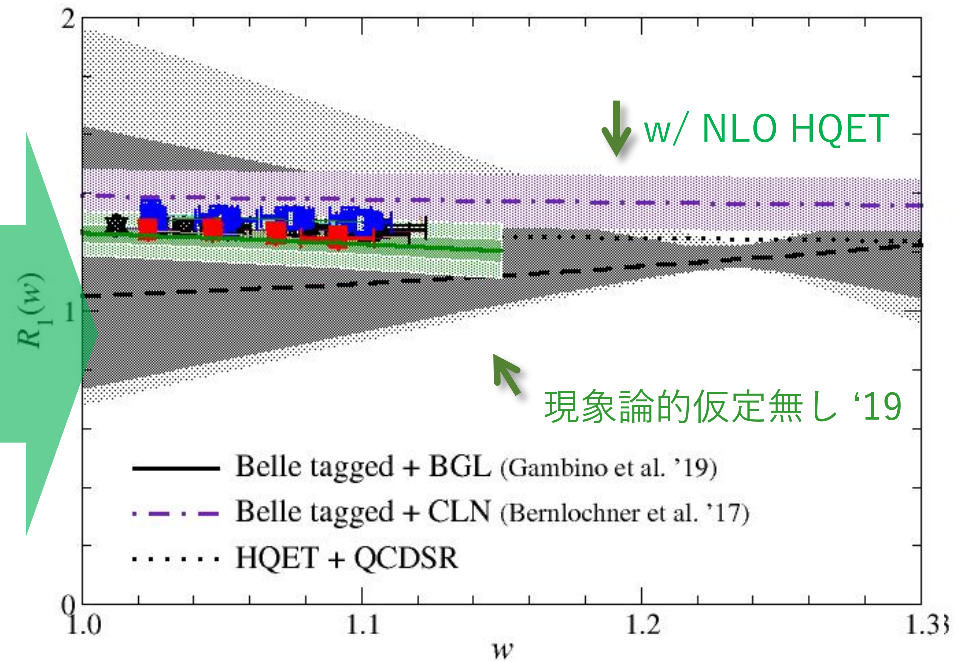
$B \to D^* \ell \nu$ 崩壊

$B \to \pi \ell \nu$ よりも計算が少ない…

- 4つの形状因子 $h_{A1}, h_{A2}, h_{A3}, h_V$ のうち h_{A1} のみが反跳ゼロ w=1 で計算されていた…
- 他の形状因子の情報は実験データから決めていた (!)

形状因子の比 $R_1 = h_V / h_{A1}$ の結果





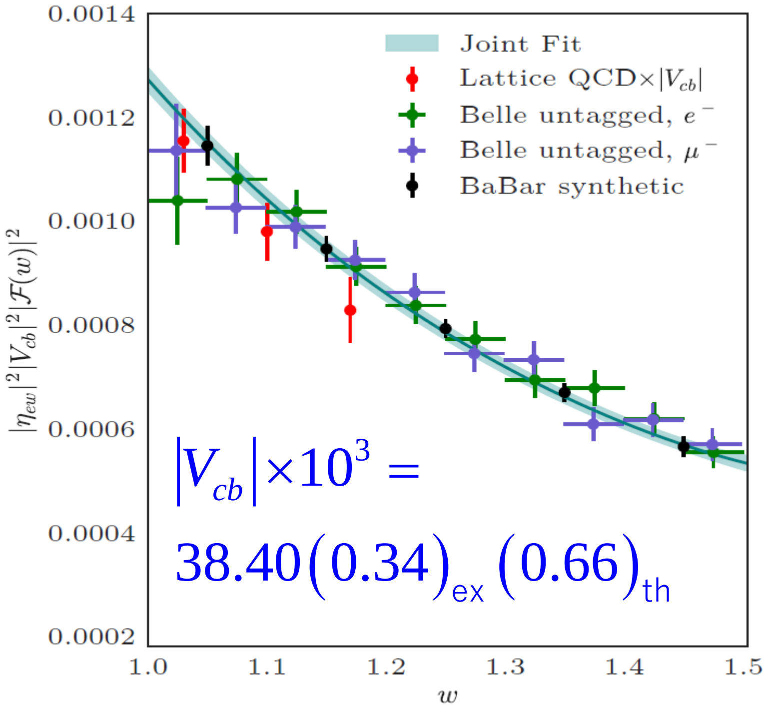
- 現象論的解析の食い違いの解消に貢献

Ferlewicz et al., 2008.09341

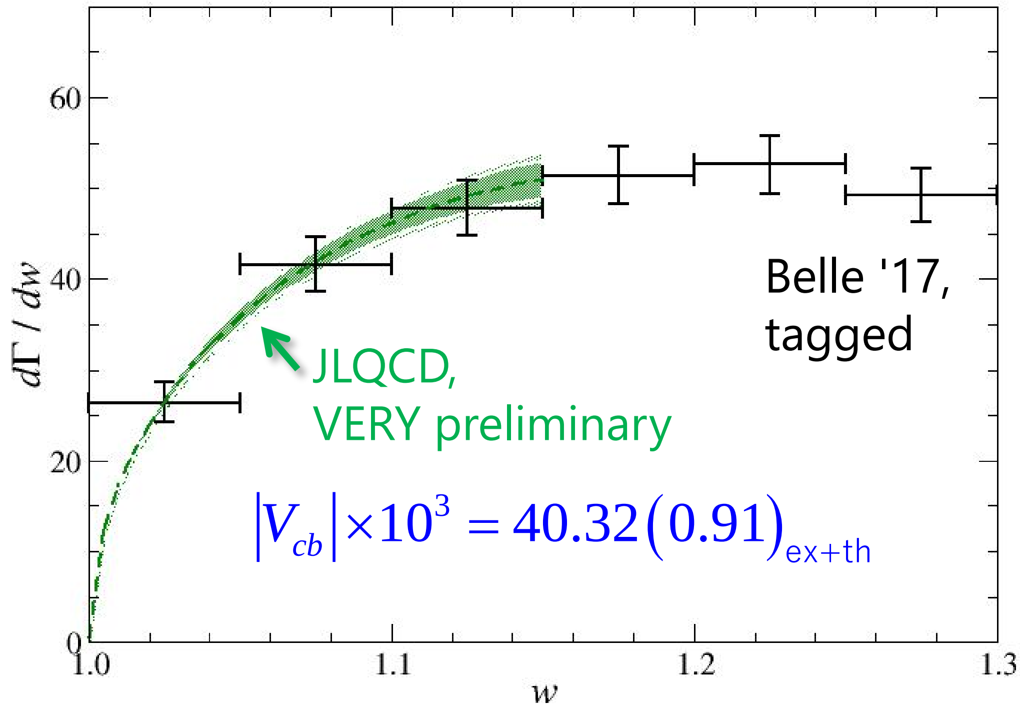
- 格子QCDのデータも入力すれば模型非依存な解析も安定化するはず

$|V_{cb}|$

Fermilab/MILC '21



JLQCD on going



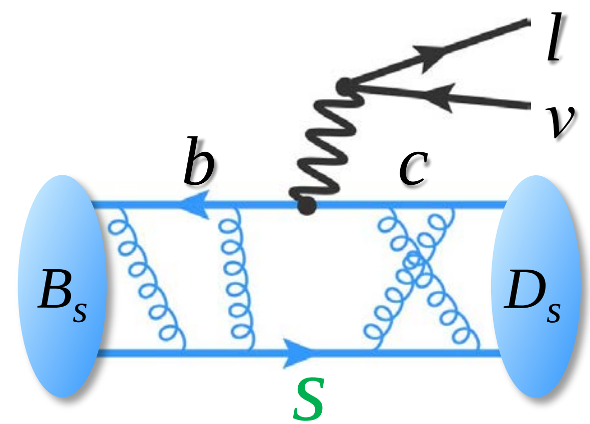
- Fermilab/MILC: インクルーシブからのずれはそのまま
  w依存性に実験と理論でtension
- JLQCD： より小さい$h_{A1}(1)$、より大きい$|V_{cb}|$
  解析を最終化中 (データ=Belle untagged, BaBar、系統誤差相関)

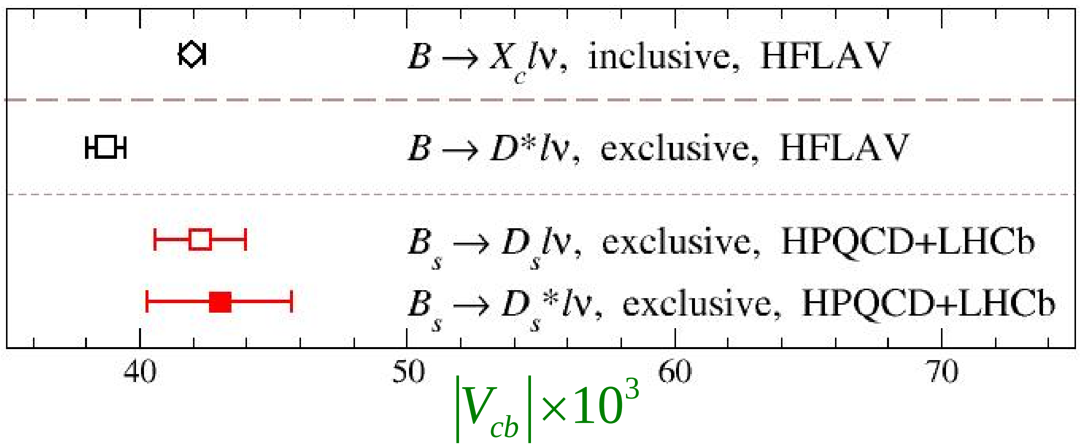
全ての形状因子の格子計算が行われているが、$|V_{cb}|$の矛盾は未解決

B_s中間子崩壊による決定

$B_s \to D_s^{(*)} \ell \nu$

- spectator = strange の $B \to D^{(*)} \ell \nu$
  - Lepageの議論 ⇒ 統計精度で有利
- 形状因子の計算： HPQCD ’17, ’19, ’21
- 分岐比の測定： LHCb '20





e.g. $B_s \to D_s^* \ell \nu$

$|V_{cb}| = 43.0(2.1)_{\rm lat}(1.7)_{\rm exp}(0.4)_{\rm EM} \times 10^{-3}$

- excl. と incl.の両方とconsistent
- 理論 (離散化)、実験とも要改善

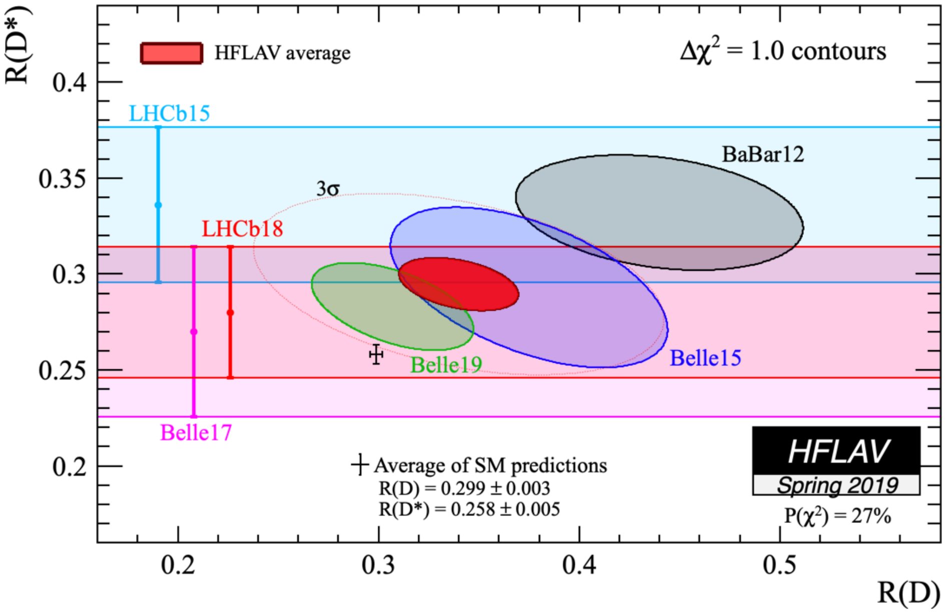
$B_s \to K \ell \nu$

- 形状因子： Fermilab/MILC, RBC/UKQCD, HPQCD,　1st observation by LHCb ’20
- 理論インプット(lattice vs LCSR)によって $|V_{ub}|/|V_{cb}|$ に矛盾…

ずれの解消に向けて興味深い決定手法を与えるが、理論・実験とも要改善

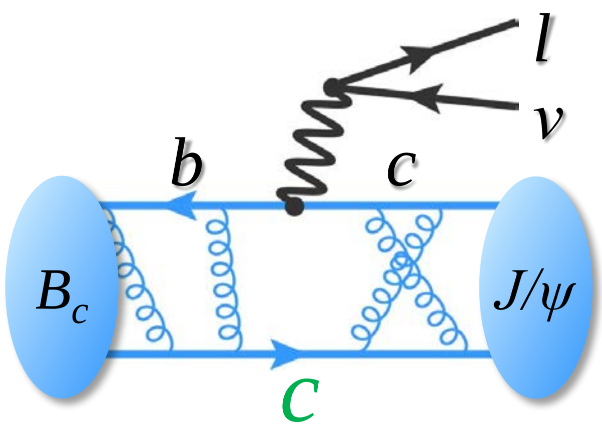
レプトンフレーバーユニバーサリティー

$R\left(D^{(*)}\right)=\Gamma\left(B\to D^{(*)}\tau\nu\right)/\Gamma\left(B\to D^{(*)}\ell\nu\right)$



こちらもspectatorを変えた崩壊で

独立検証ができないか？



$B_c \to J/\psi\,\ell\nu$ の形状因子の計算 (HPQCD '20)

1.4% 精度で $R(J/\psi)$ を決定

$R(J/\psi) = 0.2582(38)$

統計 1.1%, $a \neq 0$ 0.8%, m_b 0.6%

LHCb '18 と 1.8 σ でconsistent

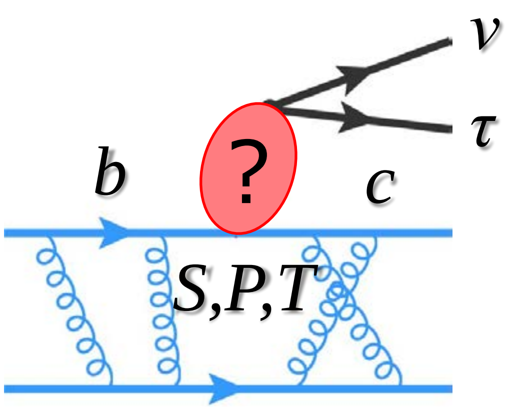
$R(J/\psi) = 0.71(18)_{\mathrm{stat}}(17)_{\mathrm{sys}}$

⇒ ΔR ～ 0.07 / Run 3, 0.02 / Upgrade II

レプトンフレーバーユニバーサリティー

標準理論と実験のずれを説明する新物理模型の特定

⇒ 新物理の寄与を記述する形状因子が必要



e.g. $B \to D\ell\nu$ テンソル形状因子 (Faur-TK-Kou on-going)

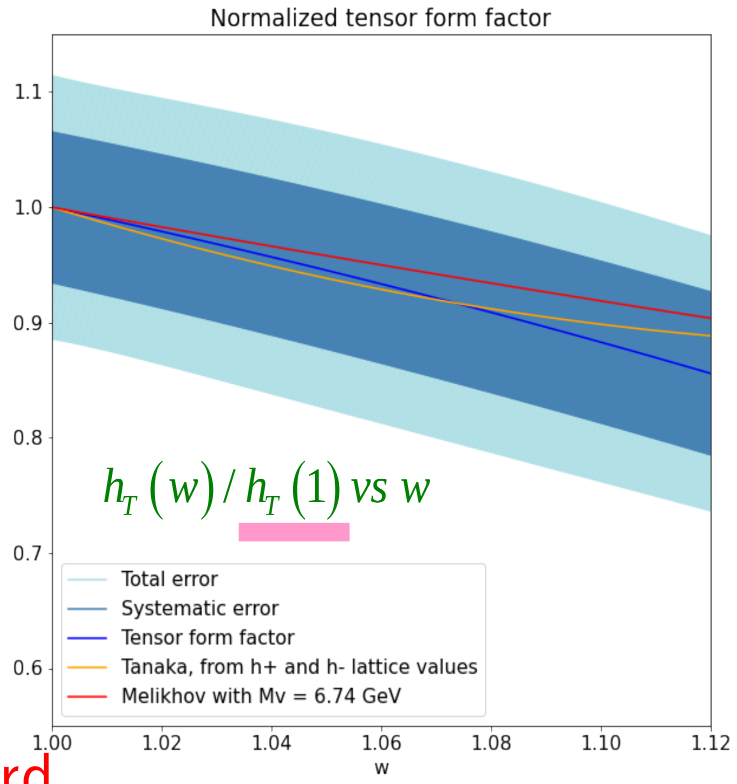
$$\langle D|\,\bar{c}\sigma^{\mu\nu}b\,|\overline{B}\rangle = i\sqrt{m_B m_D}\left[h_T\left(v'^{\mu}v^{\nu} - v'^{\nu}v^{\mu}\right)\right],$$

✓ 連続時空 / 物理点への外挿

✓ 系統誤差の評価

× くり込みはまだ

- 初めての第一原理計算
  - 10%統計、10%系統誤差
  - 現象論的計算とconsistent



他の相互作用 / 崩壊への応用はstraightforward

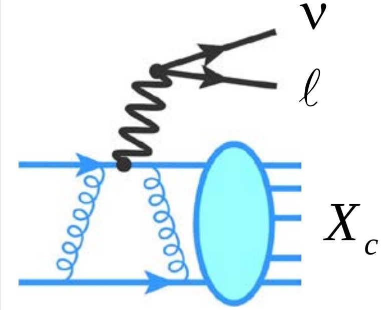
インクルーシブ崩壊

＝"終状態のハドロンについて足し上げる"

$e.g.\ B \to X_c \ell \nu$

$= B \to D\ell\nu + D^*\ell\nu + D\pi\,\ell\nu + D\pi\pi\,\ell\nu + \ldots$

$$\sum_{X_c} \left| \quad \right|^2$$



実験： 終状態ハドロンを見ない
理論： 光学定理＋演算子積展開

≠エクスクルーシブの単純和

$$\Gamma \sim \sum_X \left|\langle X | V-A | B\rangle\right|^2 = \mathrm{im}\langle B|(V-A)\otimes(V-A)|B\rangle = \sum_k \frac{c_k(\alpha_s)}{m_b^{n_k}}\langle B|O_k|B\rangle$$

光学定理　　　演算子積展開

– α_s, $1/m_b$ の 2 重展開： 収束性?

– 非摂動インプット： HQETパラメタ $\langle B|\bar{b}(iD)^2 b|B\rangle$, $\langle B|\bar{b}(g\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu})b|B\rangle, \cdots$

e.g. JLQCD '02, ..., ETM '19

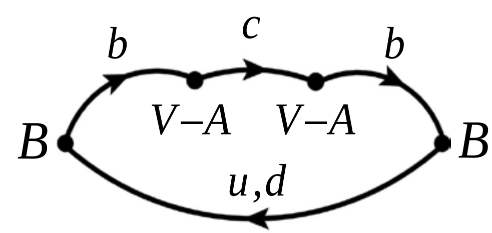
⇕

小林益川行列の矛盾 ⇔ インクルーシブ崩壊率の直接計算

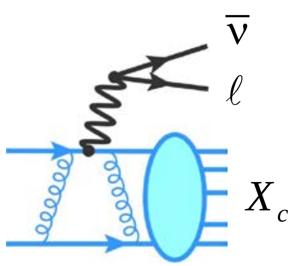
インクルーシブ崩壊率の格子計算

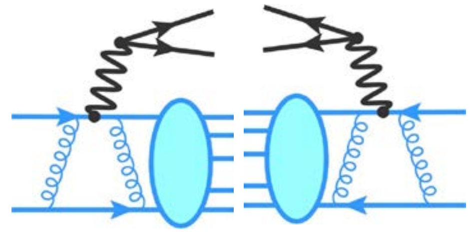
① 格子上の４点関数からhadoronic tensor $W_{\mu\nu}$を計算 Hashimoto, PTEP '17

$$d\Gamma \sim G_F^2 \left|V_{cb}\right|^2 L_{\mu\nu} W^{\mu\nu}$$



$$W_{\mu\nu} \sim \sum_{X_c} \left| \quad \right|^2 \sim \mathrm{im} \sum_{X_c} \quad \sim \left\langle B \middle| J_\mu^\dagger(-\boldsymbol{q}) J_\nu(\boldsymbol{q}) \middle| B \right\rangle$$





② leptonic tensor $L_{\mu\nu}$で決まる重みで積分 Gambino-Hashimoto, PRL '20

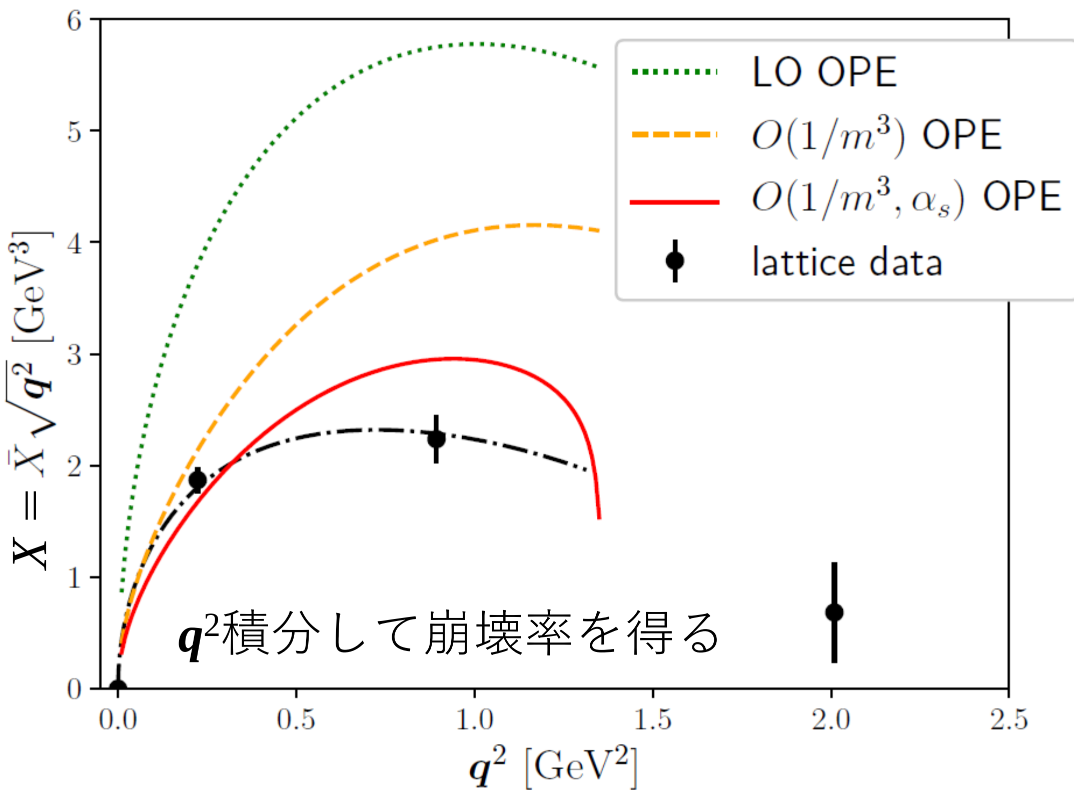
$$\Gamma = \int_0^{q^2_{\max}} d\boldsymbol{q}^2 \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} d\omega\, K(\omega, \boldsymbol{q}) \left\langle B \middle| J_\mu^\dagger(-\boldsymbol{q}) J_\nu(\boldsymbol{q}) \middle| B \right\rangle$$

- 演算子積展開を回避して格子上で崩壊率が計算できる
- ４点関数が必要 － 計算コストが高い
- 重み関数の具体形を仮定しない ⇒ 幅広い応用

インクルーシブ崩壊率の格子計算

Gambino-Hashimoto, PRL '20

被積分関数 $X(\boldsymbol{q}^2)$ を演算子積展開(OPE)と格子計算で比較



$B_s \to X_c \ell \nu$

$a^{-1} \sim 3.6$ GeV, $M_\pi \sim 300$ MeV,
$m_b = 2.4\, m_c$

パラメタ依存性は大きくない？
$\Leftrightarrow B \to D^* \ell \nu$

O($1/m_b^{2,3}$)の非摂動インプット
〜実験データからfix

高次補正を取り入れるにつれて格子計算との一致が良くなる!

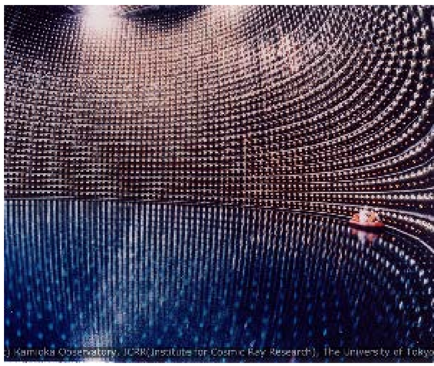
$|V_{Ub}|$のずれの解消 ⇔ より詳細な比較検証

see also Hashimoto, Mächler @ Lattice 2021

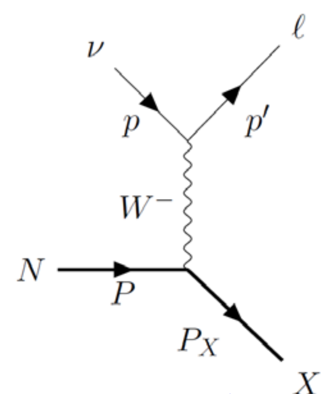
幅広い応用

Fukaya-Hashimoto-TK-Ohki '20

T2K実験、ニュートリノ・核子散乱



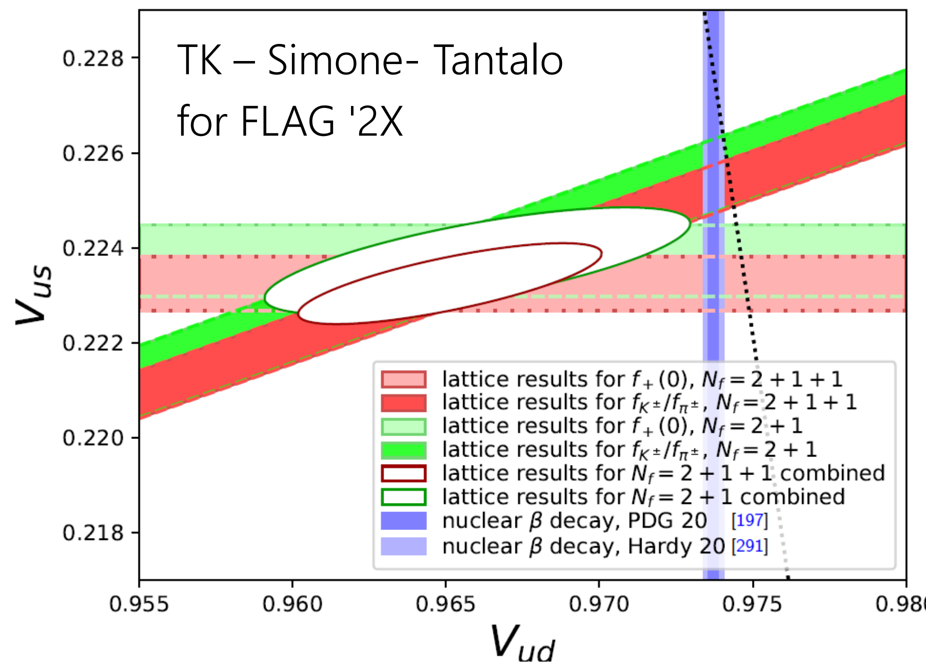
前置検出器
– ニュートリノビーム
の情報を取得
– 中エネルギー領域の
散乱断面積



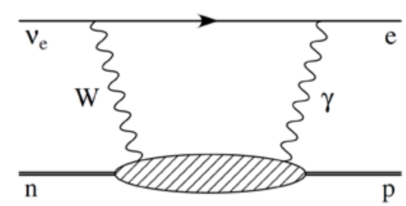
$X = N, N\pi, \Delta, \ldots$

⇒ J-S. Yoo @ Lattice 2021

超許容原子核β崩壊の輻射補正



γW box diagram 輻射補正



まとめ

格子QCDの概要とBの物理での進展、問題点

- 40年間で格子QCD研究は格段に進歩した。Bの物理を含む幅広いテーマへの応用が進められている。
- Bの物理の格子シミュレーションはマルチスケール問題。膨大な演算量を必要とする。
- それでも、レプトニック崩壊やセミレプトニック崩壊で実験に見合う精度の計算が可能になってきている。
- インクルーシブ崩壊率の直接計算など新しい応用も開発されている。

長年の宿題を解決して、実験と理論の精密検証に貢献